

Física Experimental 1

Construção de Gráficos

Prof. Dr. Walmor Cardoso Godoi

Departamento de Física

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

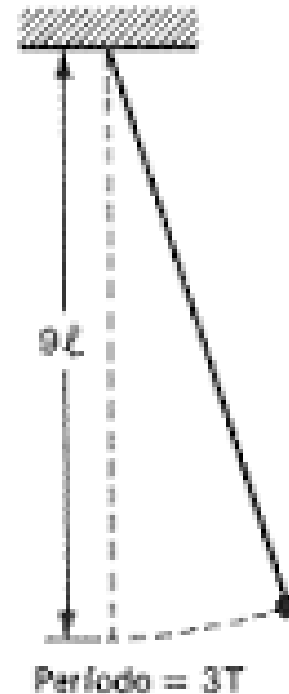
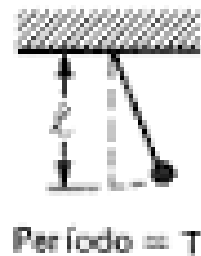
<http://www.walmorgodoi.com/utfpr>

Introdução

Nas atividades experimentais, muitas vezes, objetiva-se estudar a maneira como uma propriedade, ou quantidade, varia com relação a uma outra quantidade, por exemplo:

“De que modo o comprimento de um pêndulo afeta o seu período?”

$$T(\ell)=?$$



Introdução

- Tabelas

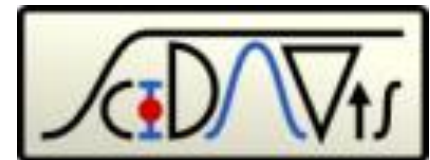
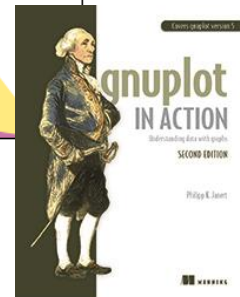
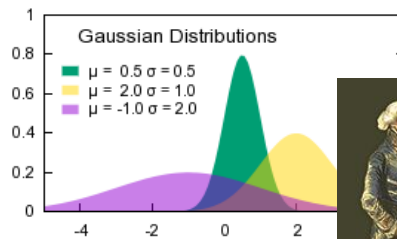
Distância (m)	Tempo (s)
0,10	0,775
0,20	1,325
0,30	1,873
0,40	2,525
0,50	3,073

DESMATAMENTO DA AMAZÔNIA	
Ano	Area (km ²)
2001	18.165
2002	21.393
2003	25.247
2004	27.423
2005	18.846
2006	14.109
2007	11.532
2008	12.911
2009	7.464

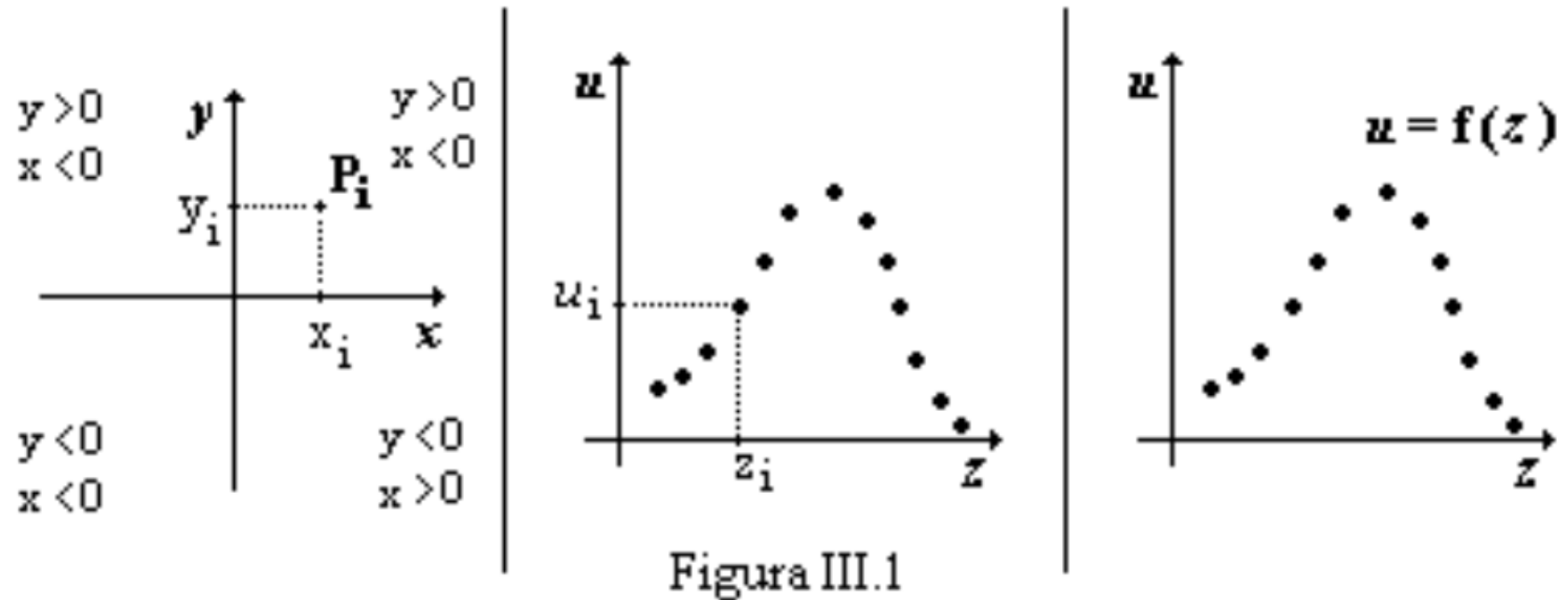
pais	saneamento básico (%)		taxa de mortalidade infantil (por mil)		
	esgotamento sanitário adequado	abastecimento de água	anos de permanência das mães na escola		
			até 3	de 4 a 7	8 ou mais
I	33	47	45,1	29,6	21,4
II	36	65	70,3	41,2	28,0
III	81	88	34,8	27,4	17,7
IV	62	79	33,9	22,5	16,4
V	40	73	37,9	25,1	19,3

Gráficos

- Visualização Científica
- **Comportamento de uma variável em relação a outra (2D, 3D, 4D, nD)**
- Uso de papel milimetrado (linear), monolog, di-log
- Uso de computador: SciDavis, Origin, GnuPlot, Excel



Sistemas de Coordenadas Cartesianas



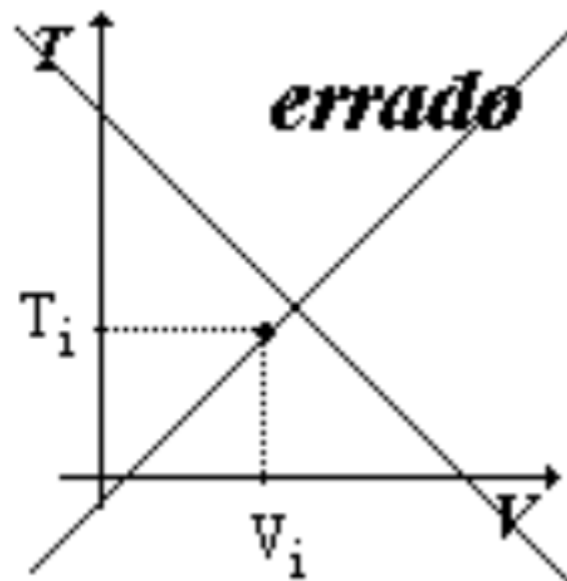
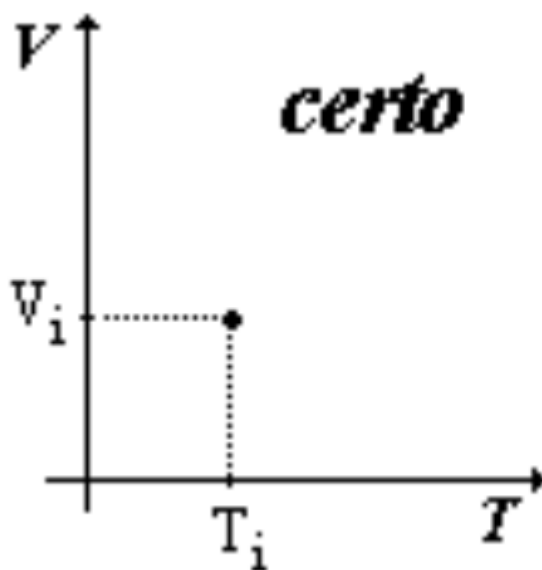
Observar quem é a variável independente (x)

Exemplo 15: Em um experimento de dilatação volumétrica mediu-se o volume (V) de uma esfera para várias temperaturas (T), obtendo-se uma tabela de valores de V e de T , cujos dados foram anotados na tabela abaixo.

$V (10^{-9} \text{ m}^3)$	64,1	80,7	97,8	114,9	138,0	162,5	195,0	223,3	260,0
$T (^{\circ}\text{C})$	60,00	65,00	70,00	75,00	80,00	85,00	90,00	95,00	100,00
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$V(T) = y(x)$$

$$T = x$$

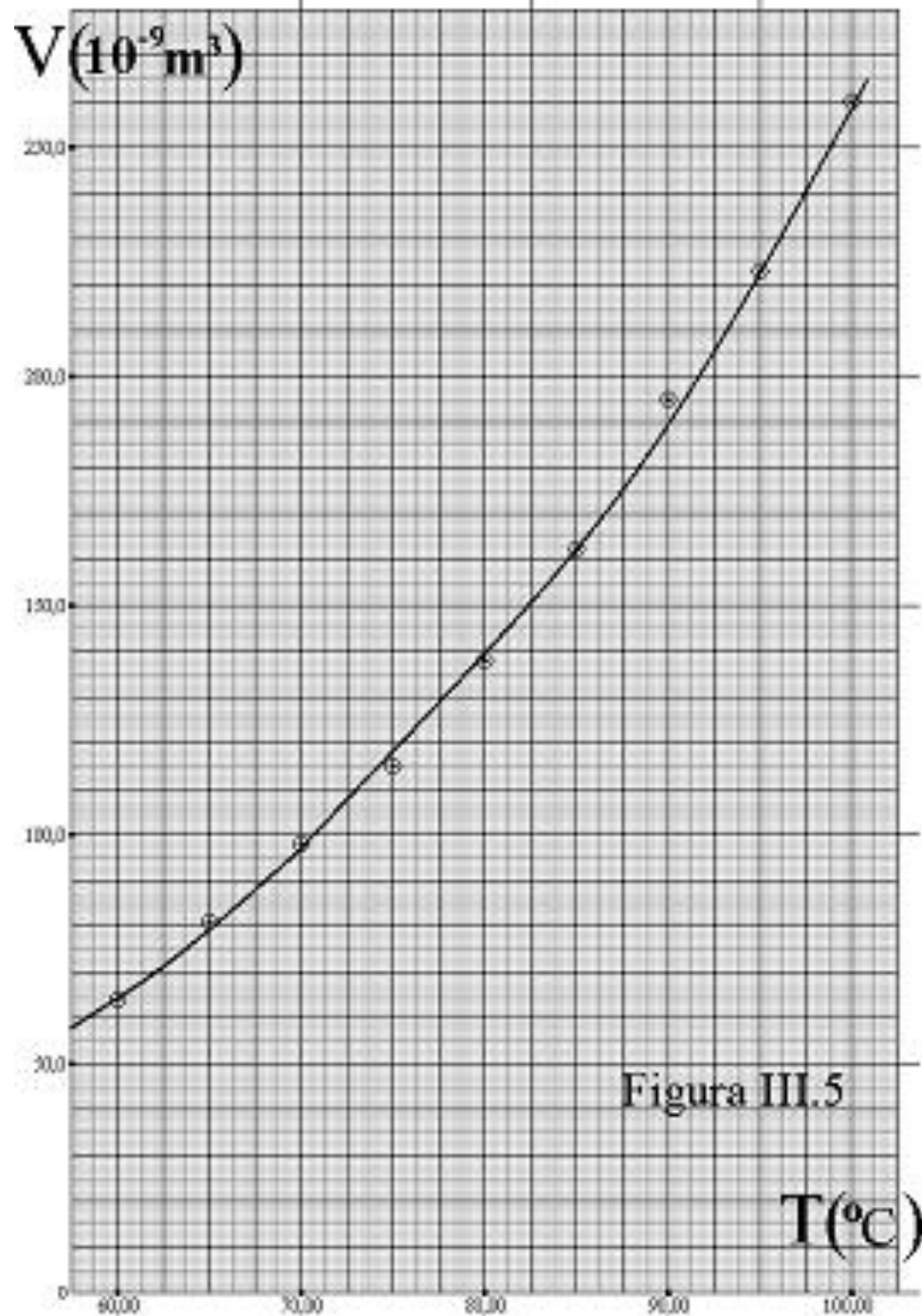


Gráficos

- Marcação dos pontos experimentais

- É fundamental que os pontos experimentais sejam bem marcados no gráfico e identificados por um sinal que não deixe dúvidas sobre sua localização.





Passos para Confecção do gráfico

- 1º - Montar a tabela e determinar Y (eixo vertical, variável dependente) e X (eixo horizontal, variável independente)
- Exemplo: dados do MRUV

Distância(m) Y	Tempo (s) X
0,1	0,391
0,2	0,548
0,3	0,668
0,4	0,770
0,5	0,860

Passos para Confecção do gráfico

- 1º - Montar a tabela (cont)

distância(m) y	tempo (s) x	tempo ² (s ²) x
0,1	0,391	0,153
0,2	0,548	0,300
0,3	0,668	0,446
0,4	0,770	0,593
0,5	0,860	0,740

Para obter a
aceleração no papel
milimetrado vamos
plotar $d \times t^2$

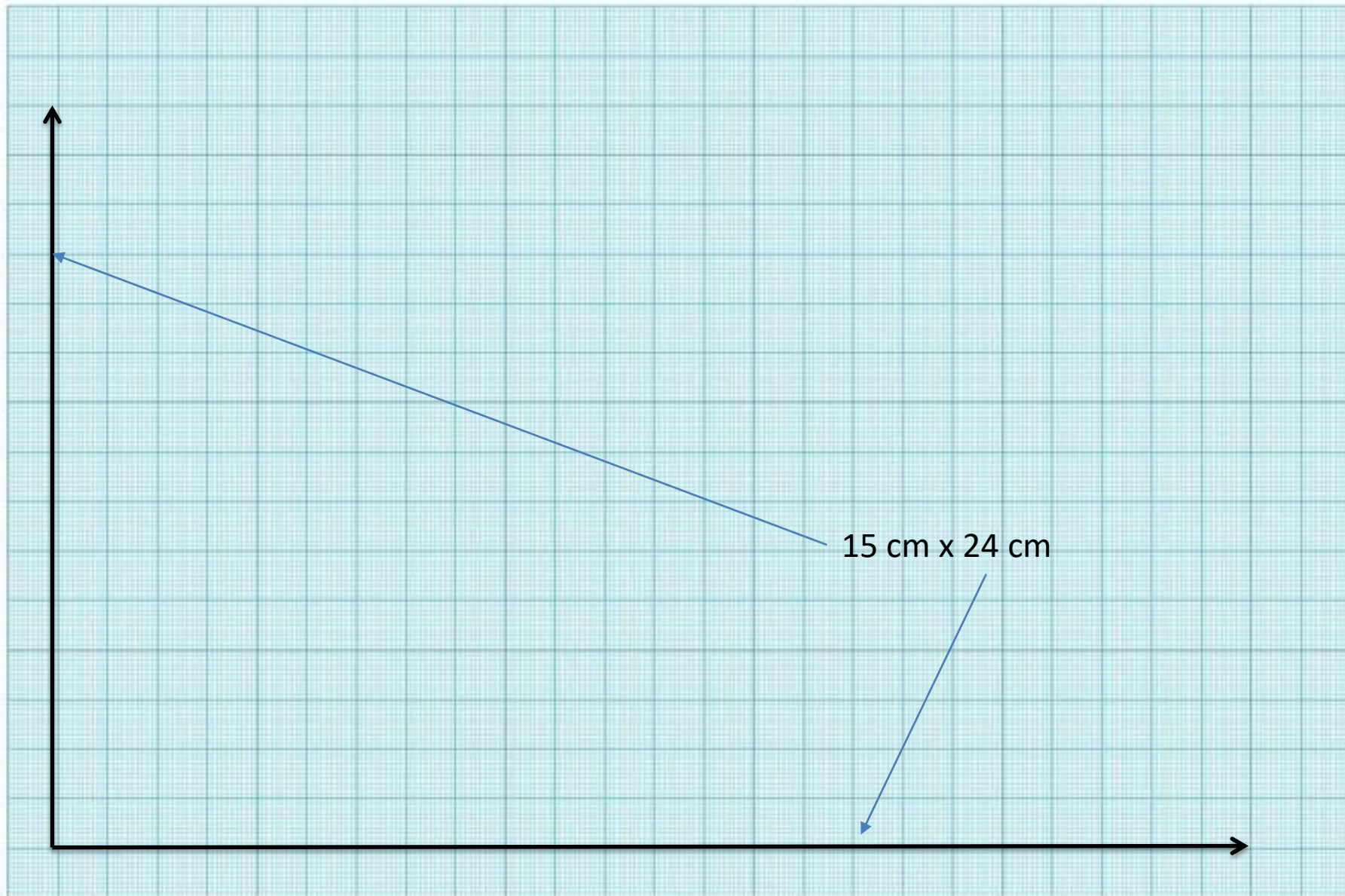
Pois

$$d = \frac{1}{2} at^2$$

$Y = AX + B$ (equação da reta)

Passos para Confecção do gráfico

- 2º - definir o espaço disponível em
 - Y (por exemplo, 12 cm ou 15 cm)
 - X (por exemplo, 15 cm ou 24 cm)
 - Ou.... **Ocupar todo o espaço disponível no papel deixando espaço para título nos eixos**



Passos para Confecção do gráfico

- 3º. Definir o **módulo** em x (M_x) e y (M_y)
(escala de conversão)

Módulo em Y (M_y)

$$M_y = \frac{\text{o espaço disponível em Y (cm)}}{\text{intervalo da grandeza física em y (unidade)}}$$

Módulo em X (M_x)

$$M_x = \frac{\text{o espaço disponível em X (cm)}}{\text{intervalo da grandeza física em x (unidade)}}$$

Passos para Confecção do gráfico

- 3º. Definir o **módulo** em x (Mx) e y (My)
(escala de conversão)

Módulo em Y (My)

$$My = 15 \text{ cm} / (0,5\text{m}-0,1\text{m}) = 37,5 \text{ cm/m}$$

Módulo em X (Mx)

$$Mx = 24 \text{ cm} / (0,740 \text{ m} - 0,153 \text{ m}) = 40,9 \text{ cm/s}^2$$

distância(m) y	tempo ² (s ²) x
0,1	0,153
0,2	0,300
0,3	0,446
0,4	0,593
0,5	0,740

O módulo acima é um módulo prévio. O módulo final pode ser igual ou menor que o módulo prévio

Passos para Confecção do gráfico

- 4º - Com a escala converter as medidas para inserir os pontos (em cm), -> **multiplicar cada medida pelo módulo**
 - Verificar se não terá que ser aplicado offset
 - último ponto ultrapassa o espaço disponível no eixo? Se sim, subtrair de todas as medidas a primeira medida

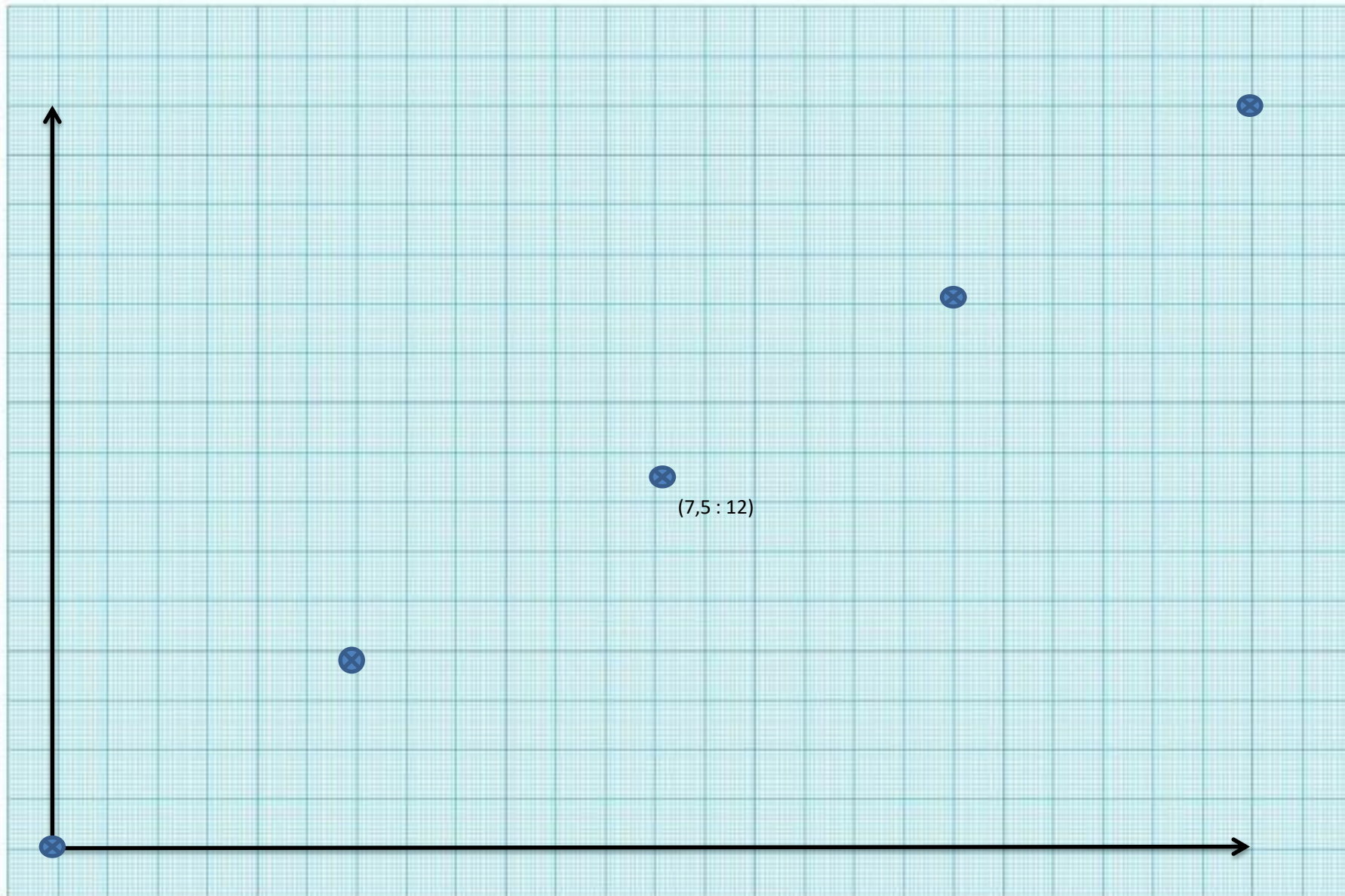
Passos para Confecção do gráfico

$$M_y = 37,5 \text{ cm/m} \quad M_x = 40,9 \text{ cm/s}^2$$

distância(m) y	tempo ² (s ²) x	Posição Ponto em Y cm	Posição Ponto em X cm
0,1	0,153	$(0,1 - \mathbf{0,1}) \times M_y = 0$	$(0,153 - 0,153) \times M_x = 0$
0,2	0,300	$(0,2 - \mathbf{0,1}) \times M_y = 3,8$	$(0,300 - 0,153) \times M_x = 6,0$
0,3	0,446	$(0,3 - \mathbf{0,1}) \times M_y = 7,5$	$(0,446 - 0,153) \times M_x = 12$
0,4	0,593	$(0,4 - \mathbf{0,1}) \times M_y = 11,3$	$(0,593 - 0,153) \times M_x = 18$
0,5	0,740	$(0,5 - \mathbf{0,1}) \times M_y = 15$	$(0,740 - 0,153) \times M_x = 24$

Offset

5º - Marcar os pontos



Passos para Confecção do gráfico

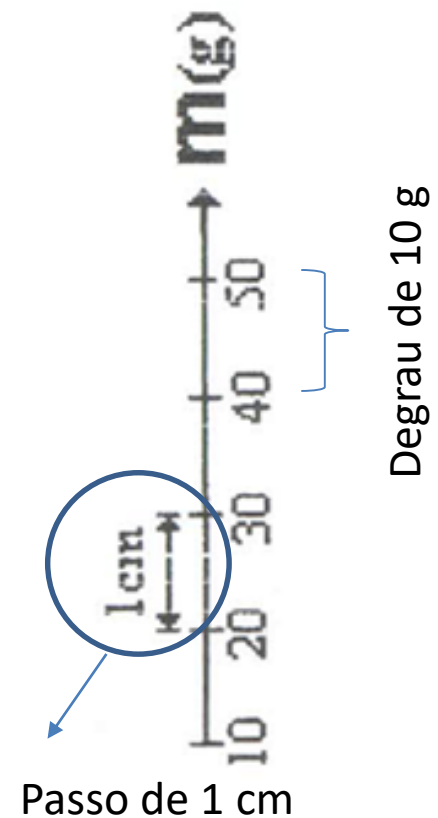
- 6º. Definir o passo e o degrau

Determinação do passo

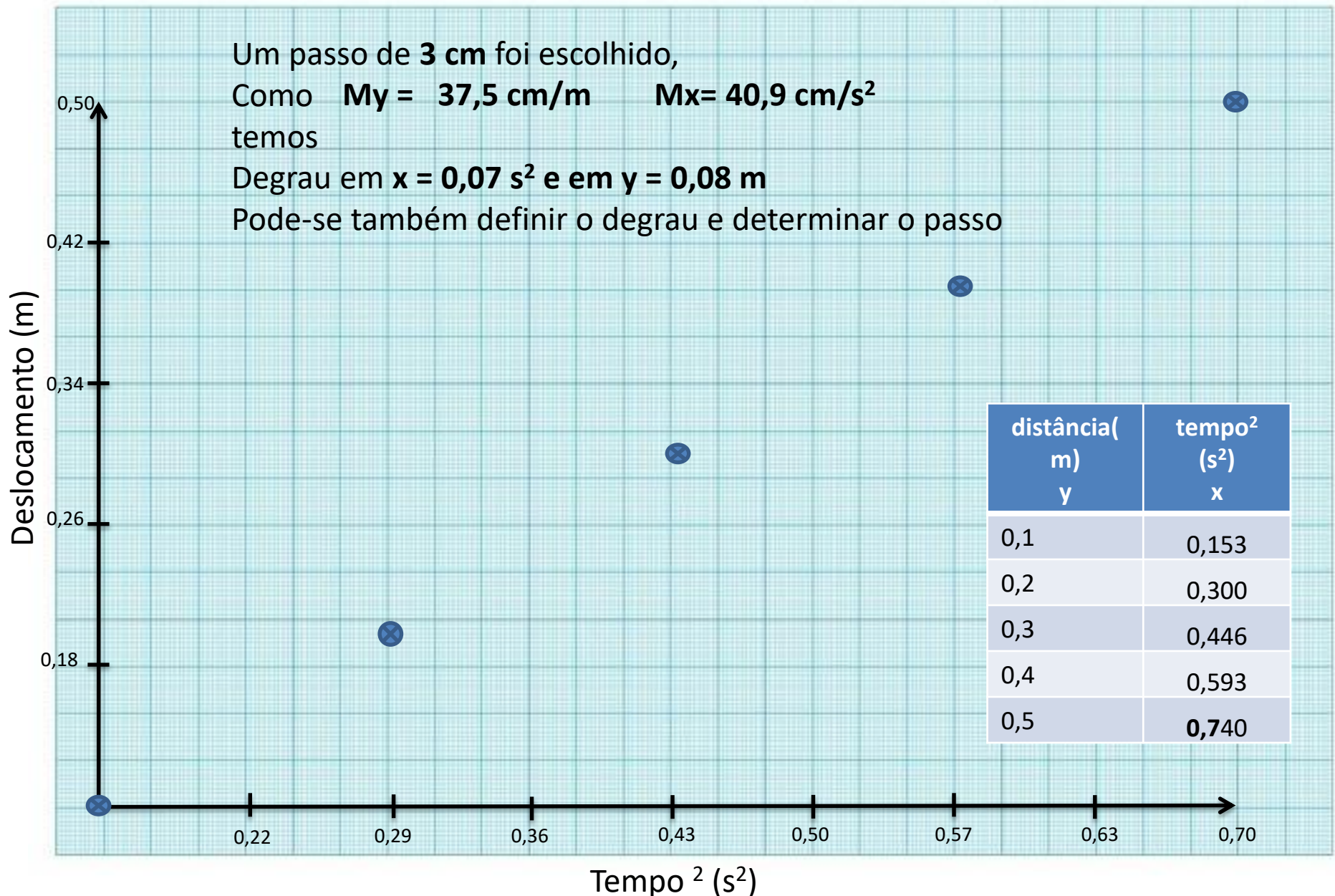
É a distância arbitrária entre divisões sucessivas que se repetirá a intervalos fixos sobre o eixo e é expresso em unidades de comprimento; veja a Figura ao lado.

Determinação do degrau

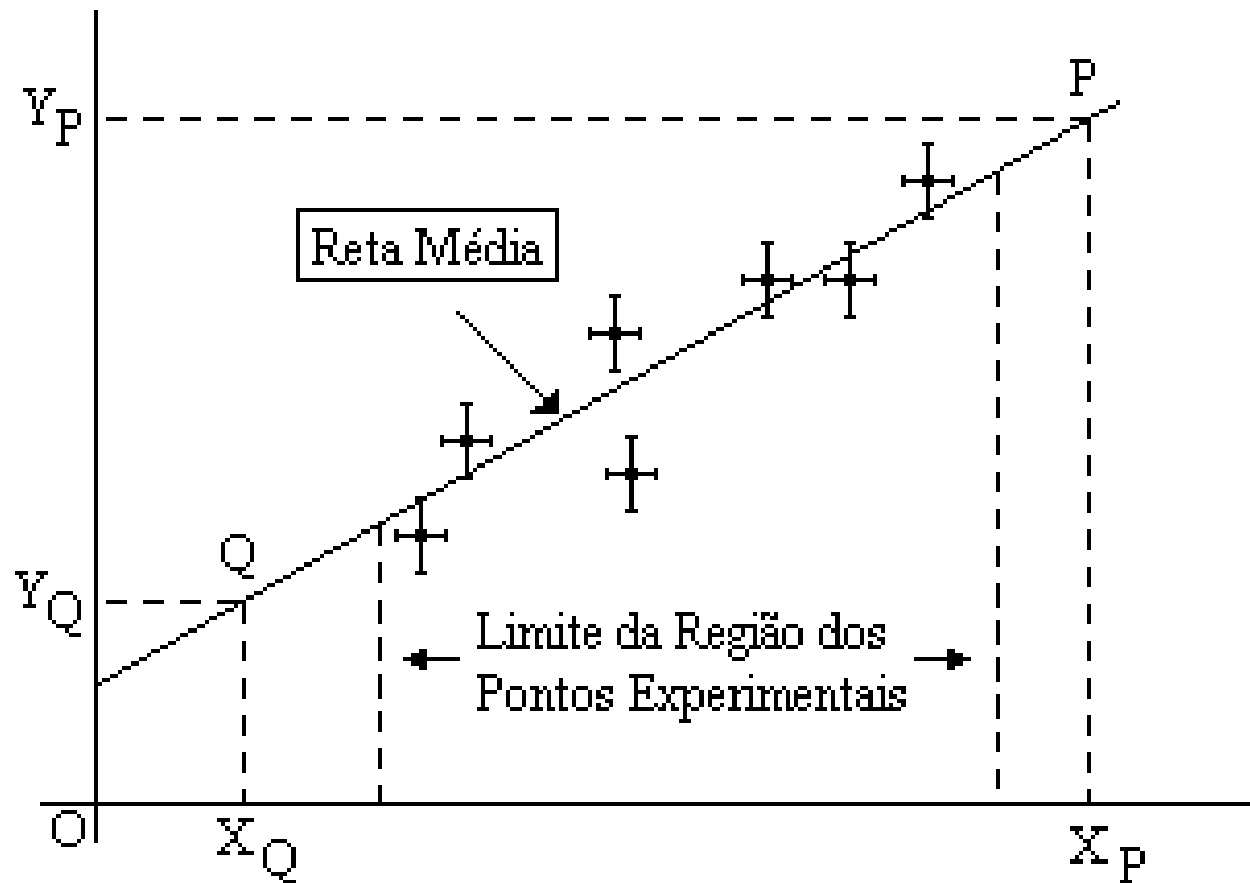
É a variação da grandeza física a ser representada, correspondendo à progressão de um passo e é expresso na mesma unidade da grandeza física a ser representada no eixo;



6º - Passo e degrau e título nos eixos

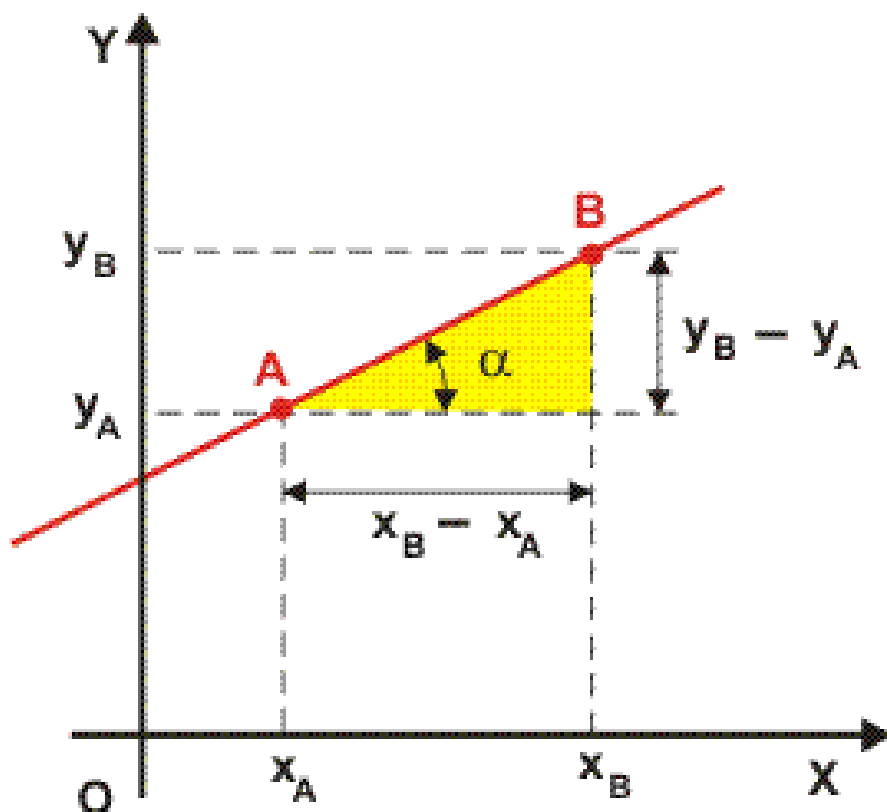


Relação Linear entre as grandezas



Cálculo do coeficiente angular

$$y = Ax + B$$



Não calcular pela tangente!

No triângulo amarelo

$$A = \cancel{\text{tg}} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

↑
coeficiente angular

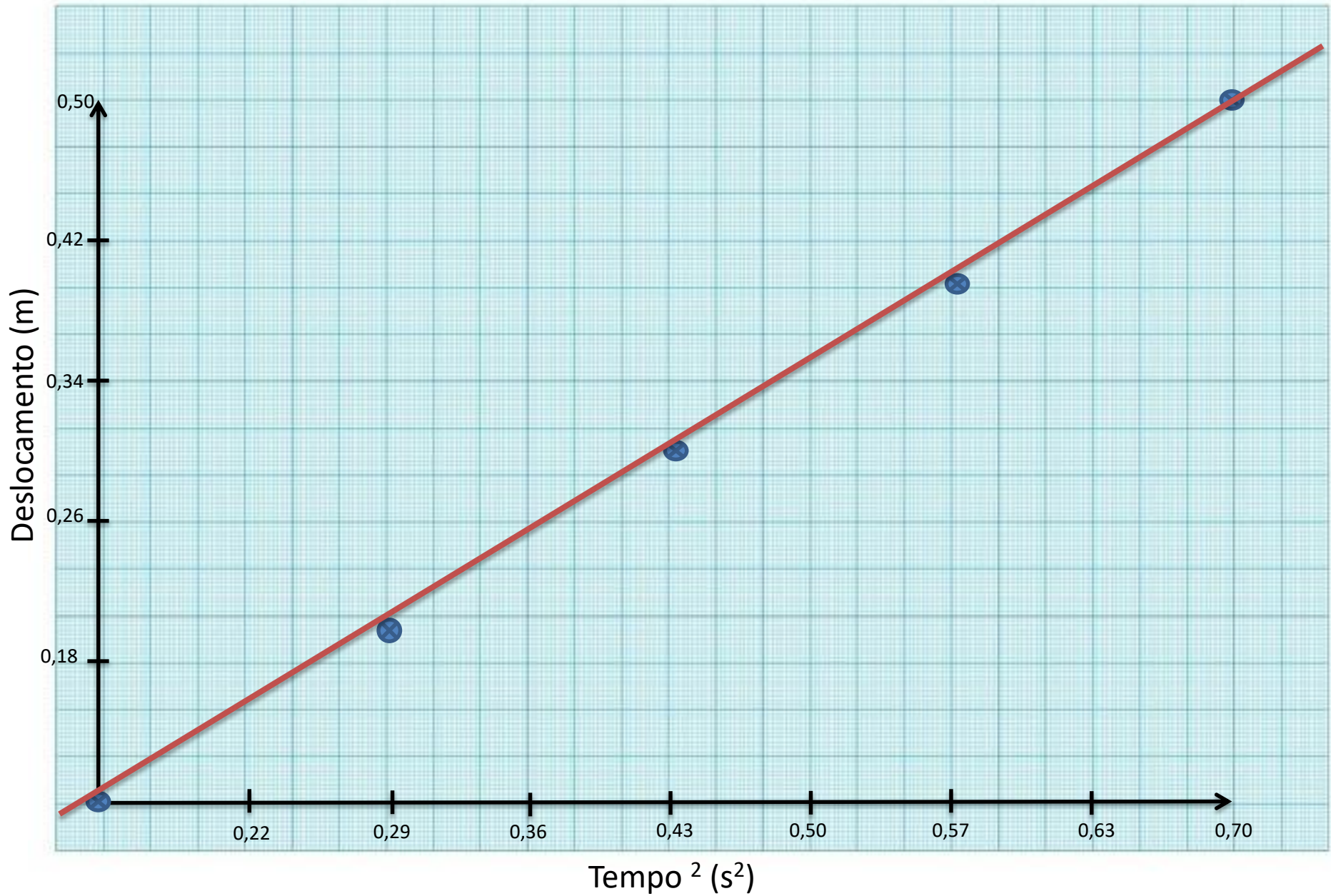
Determinação do coeficiente angular e linear da reta

Equação da reta

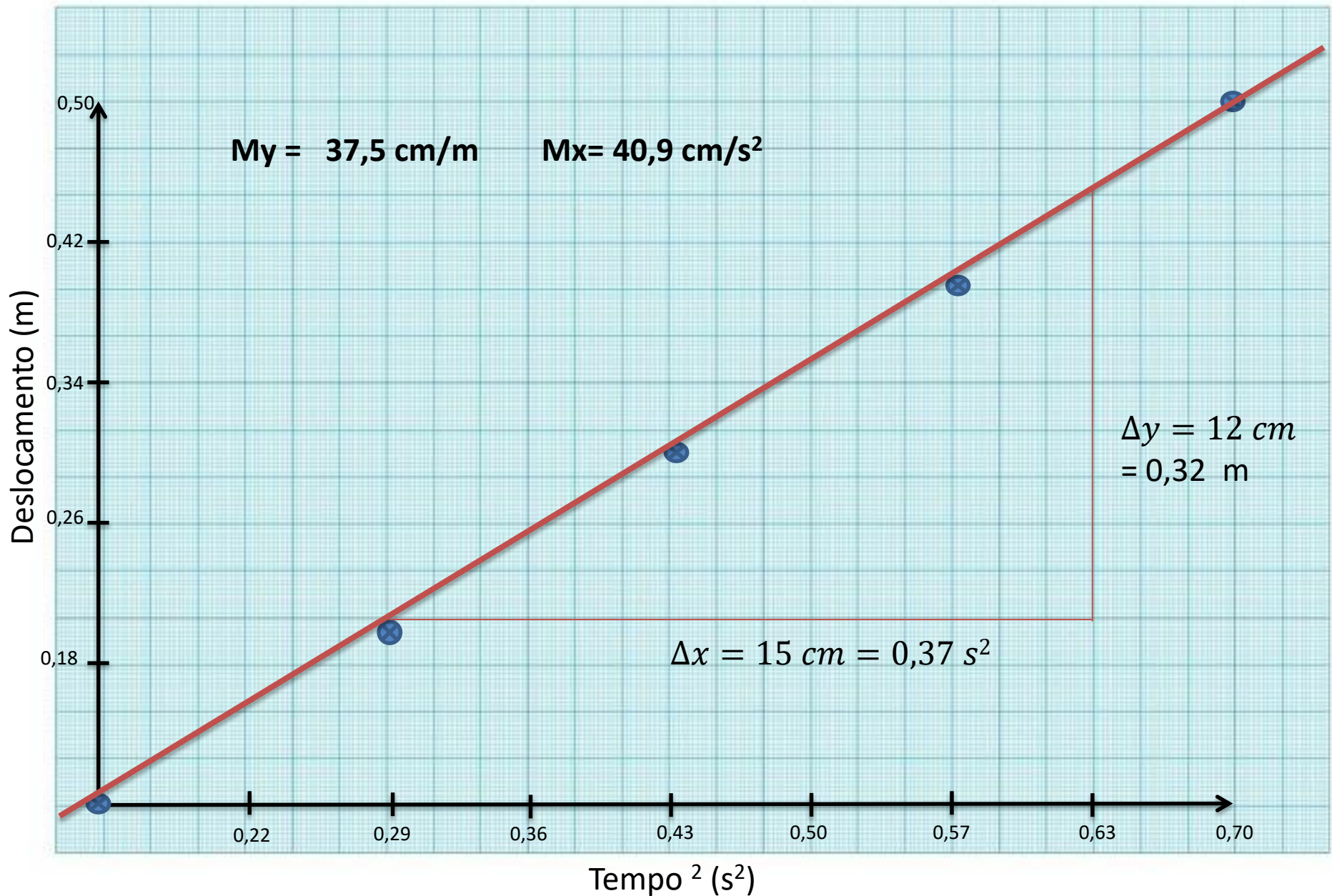
$$y = Ax + B$$

Coeficiente angular *A* e linear *B*

7º - Determinar a e b? Ajustar a reta



7º - Determinar a e b? Desenhar o triângulo



7º - Determinar a e b?

- Equação da reta no caso $d \times t^2$
- Coeficiente angular a

$$A = \frac{0,32 \text{ m}}{0,37 \text{ s}^2} = 0,86 \text{ m/s}^2$$



Metade da aceleração
pois

$$d = \frac{1}{2} at^2$$

- Coeficiente linear

$$y = Ax + B$$

Para obter b escolher dois pontos no gráfico

$$b = y1 - ax1$$

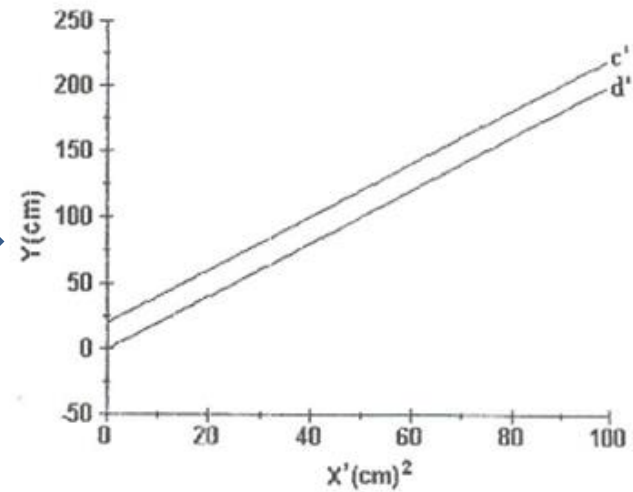
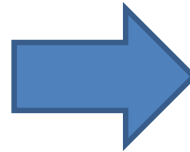
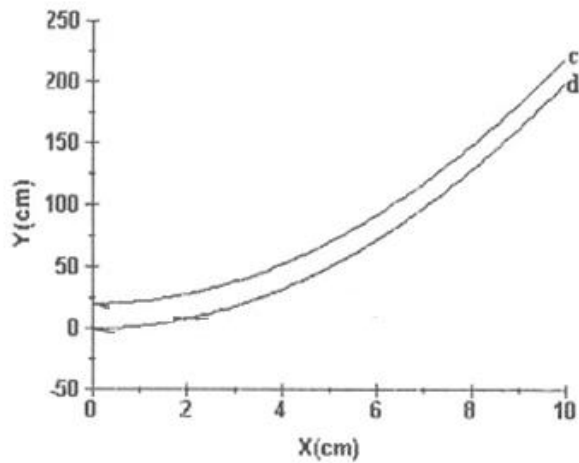
Linearização

O que fazer se as grandezas não têm relação linear?

Na maioria das vezes a relação entre duas grandezas físicas não é linear e é fundamental descobrir de que tipo é e quais são os parâmetros que caracterizam a relação entre as grandezas. Uma das maneiras de se fazer isso é linearizar o gráfico. Isto pode ser feito de dois modos:

- a) Fazendo uma mudança adequada de variável;
- b) Mudando o tipo de papel (monolog ou di-log) ou escala (no caso do uso do programa Excel).

Linearização de Gráficos



Exemplo: Mudança de Variável

No caso de pêndulo simples sabemos que, sendo T o período, L o comprimento do fio e g a aceleração da gravidade local, então:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L \quad (4)$$

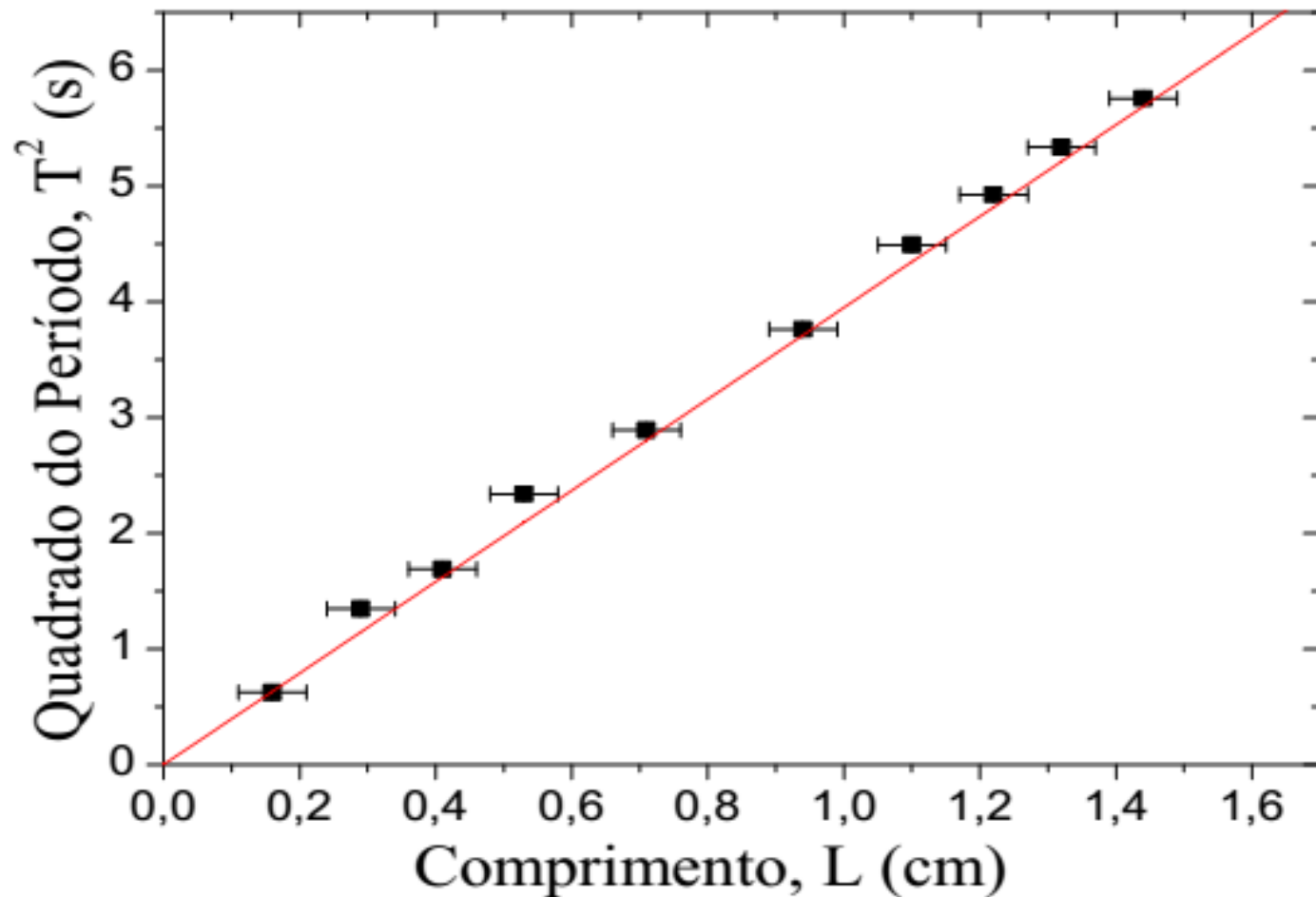
A Equação 4 mostra que a função matemática entre T^2 e L é linear, sendo $4\pi^2/g$ o coeficiente angular da reta. Vamos construir o gráfico de $T^2 \times L$ e verificar se isso acontece mesmo.

Y'

X'

Exemplo: Mudança de Variável

Determinação da aceleração da gravidade



Exemplo: Mudança de Variável

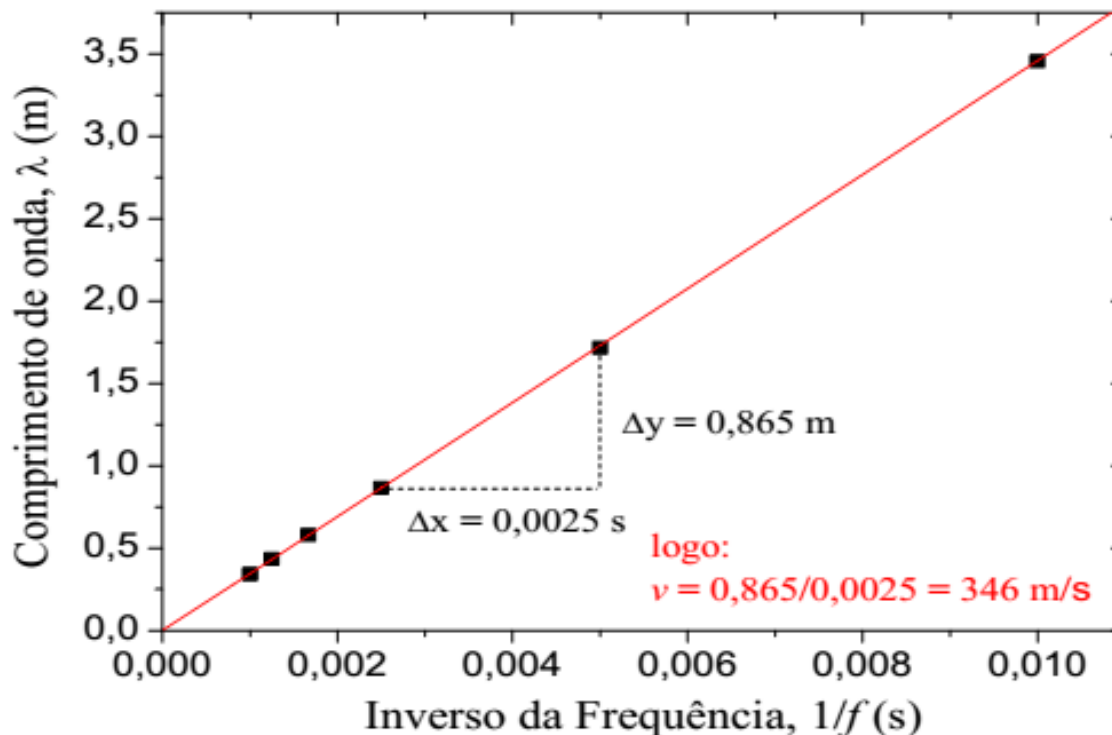
Escolhendo dois pontos do gráfico e procedendo como especificado anteriormente, encontraremos que a função matemática entre T^2 e L é $T^2 = 3,950L$. Portanto, temos uma técnica para determinar a aceleração da gravidade, isto é:

$$\frac{4\pi^2}{g} = 3,950 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2}{3,950} \quad \Rightarrow \quad g = 9,990 \text{ m/s}^2$$

Exemplo A velocidade do som v , a frequência f e o comprimento de onda λ estão relacionadas por

$$v = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{f} \quad \Rightarrow \quad \lambda = v \cdot f^{-1}$$

Determinação da velocidade do som no ar



Escolhendo dois pontos do gráfico e procedendo como especificado no exemplo 3, encontraremos que a função matemática entre λ e $1/f$ é $\lambda = 346,0(1/f)$. Comparando com a Equação 5, obtemos a velocidade do som no ar:

$$v = 346,0 \text{ m/s}$$

Linearização de gráficos

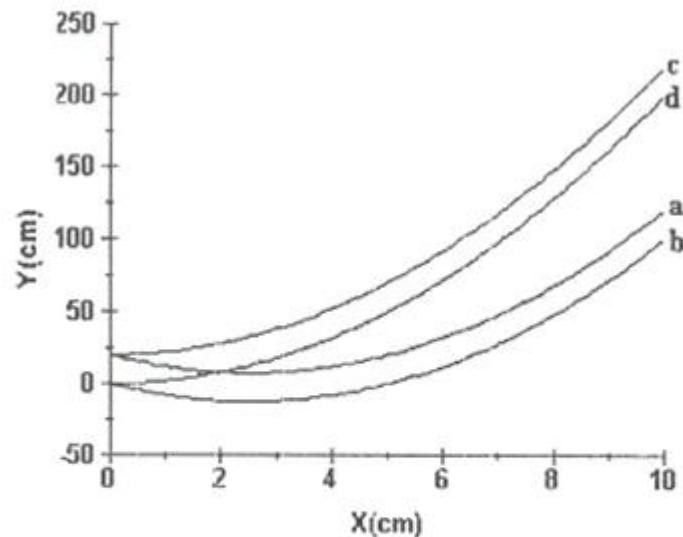


Figura 5.4 - Gráfico das funções do tipo $y(x) = ax^2 + bx + c$, correspondendo a:
a) $y(x) = 2x^2 - 10x + 20$; b) $Y(x) = 2x^2 - 10x$
c) $y(x) = 2x^2 + 20$; d) $Y(x) = 2x^2$

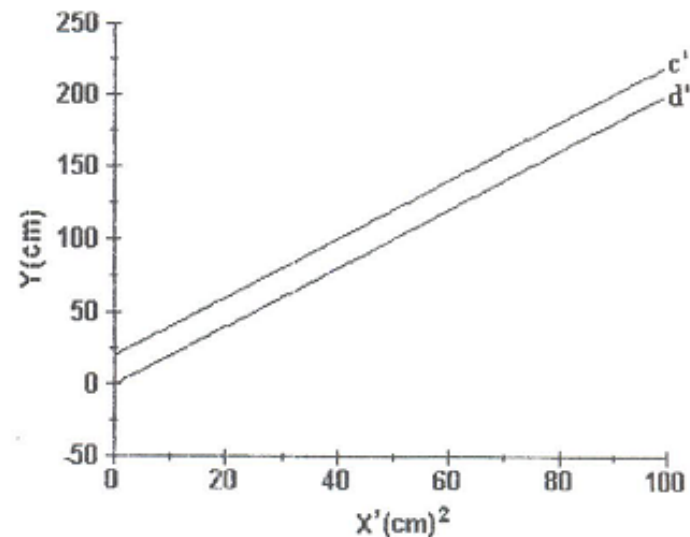


Figura 5.5 - Gráficos da linearização das curvas (c) e (d) da Fig. 5.4, fazendo a mudança de variável $X' = x^2$, tem-se:

$$c') Y(X') = 2X' + 20$$

$$d') Y(X') = 2X'$$

Linearização

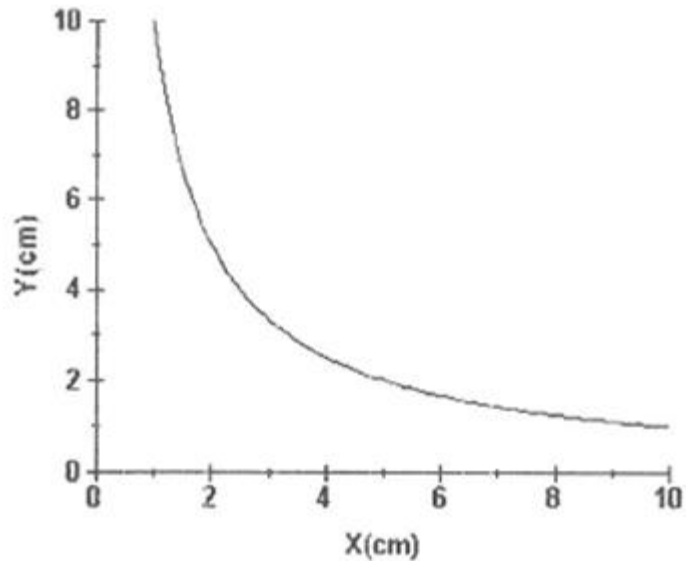


Figura 5.6 - Gráfico da função $y(x) = a(1/x)$, mais especificamente $Y(x) = 10/x$

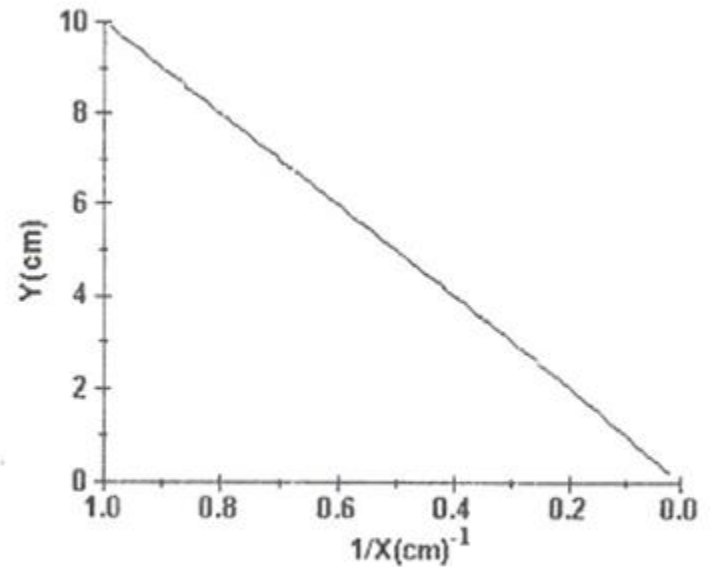


Figura 5.7 - Gráfico de linearização da função da Fig. 5.6, fazendo $X' = 1/x$, logo $Y = 10X'$.

Linearização

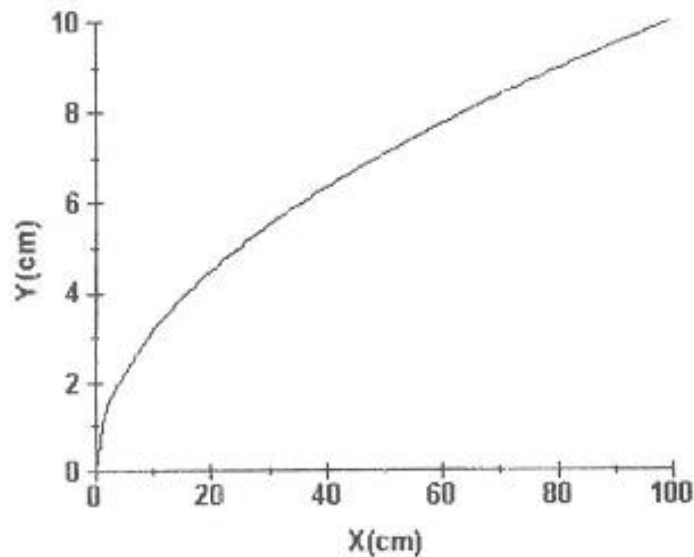


Figura 5.8 - Gráfico da função $y(x) = x^n$, $n=1/2$

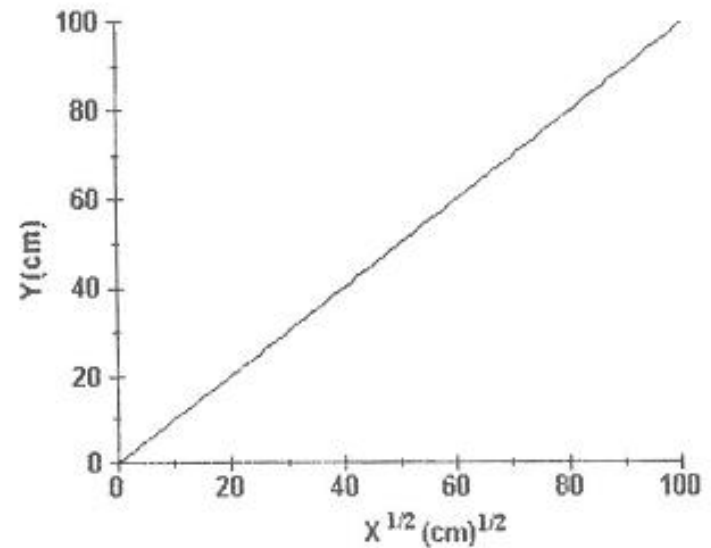


Figura 5.9 - Linearização da função da Fig. 5.8, sendo $X' = x^{1/2}$, a nova função é $Y(X') = X'$.

B) Mudando o tipo de papel (ou escala)

A Figura 2 mostra uma escala logarítmica maior, em que a graduação correspondente à origem do eixo é $g_0 = 1 \times 10^0$.



Figura 3. Representação das décadas em uma escala logarítmica.

Existem no mercado 2 tipos de papeis com escalas logarítmicas:

- **Mono-log:** um dos eixos é uma escala linear e o outro é uma escala logarítmica.
- **Di-log:** neste papel os dois eixos são escalas logarítmicas.

Gráfico do Papel Di-log (ou log-log)

Se a base não é decimal ou exponencial utiliza-se o papel di-log

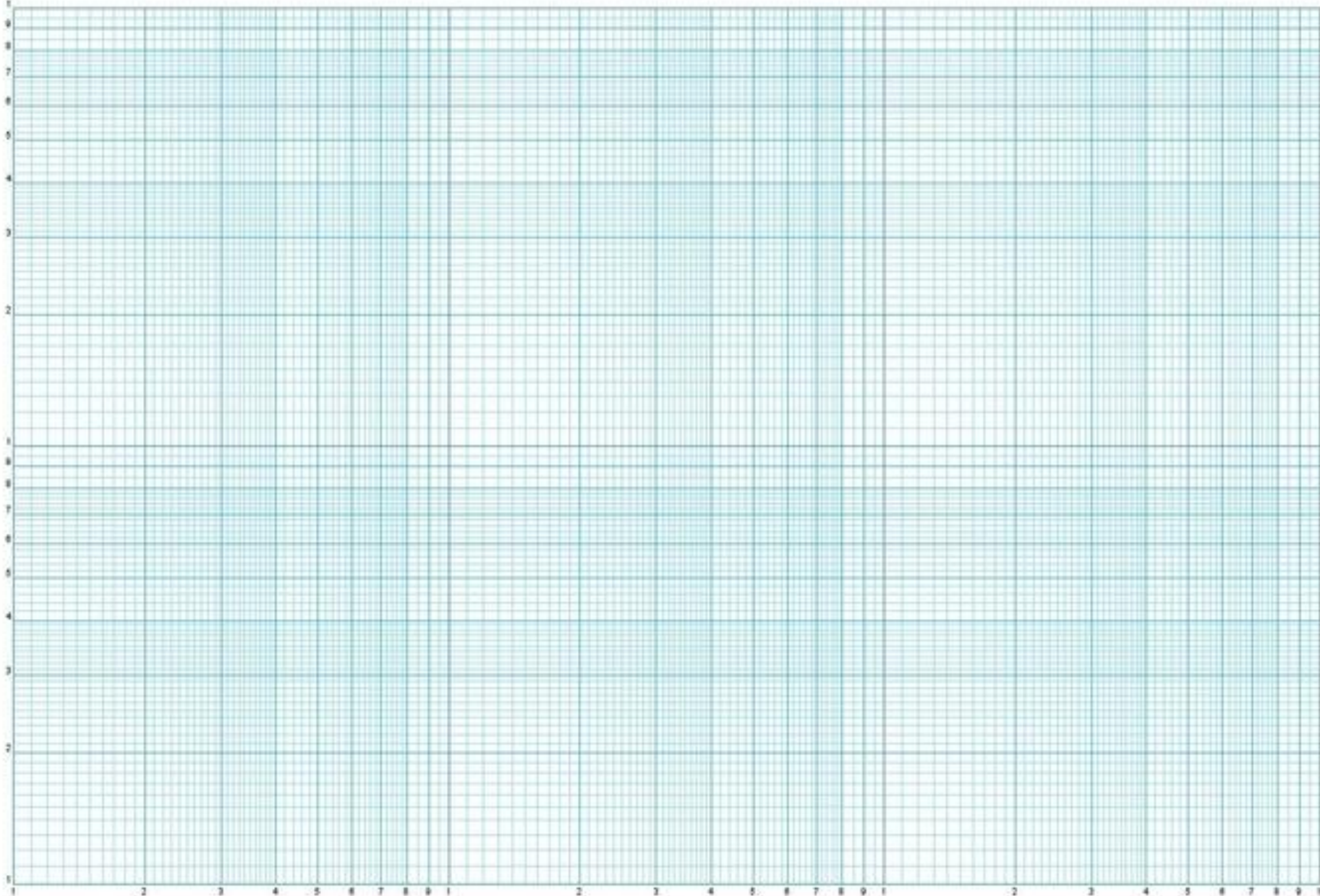


Gráfico em papel Di-log (log-log)

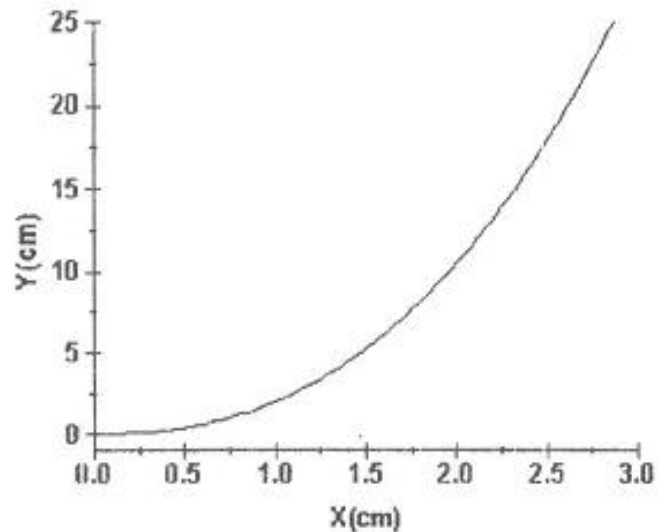


Figura 5.12 - Gráfico da função
 $Y(x) = Ax^B = 2x^{2,4}$.

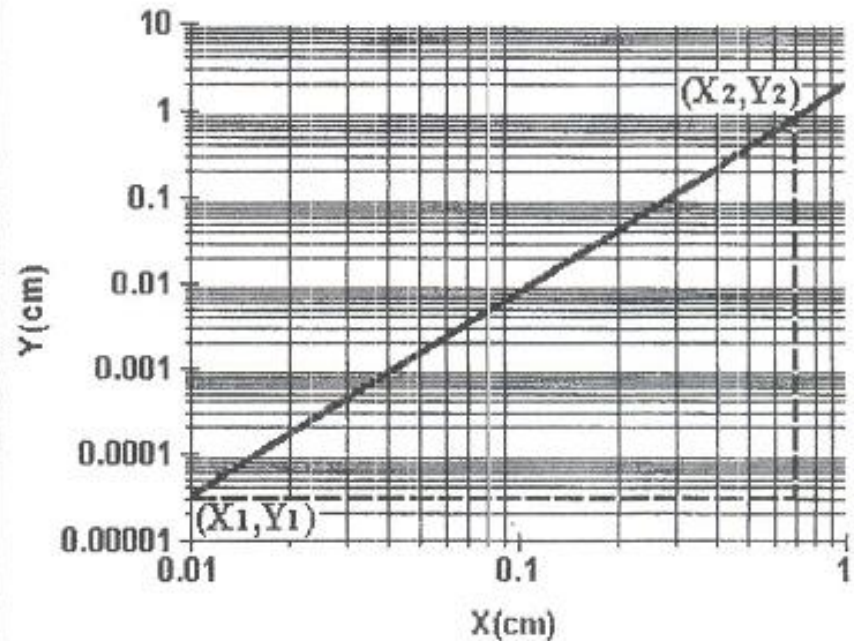


Figura 5.13 - Gráfico em papel log-log da função
 $Y(x) = 2x^{2,4}$.

Papel Di-Log

- Se a base não é decimal ou exponencial utiliza-se o papel log-log

$$\log Y(x) = \log(Ax^B) = \log A + \log x^B$$

$$\begin{aligned}\log Y(x) &= \log A + B \log x \\ Y'(x) &= A' + B x'\end{aligned}$$

O coeficiente angular será: $B = \frac{\log Y_2 - \log Y_1}{\log X_2 - \log X_1}$

O coeficiente linear será: $\log(Y_1) = A' + B \cdot \log(X_1)$

- MRUV

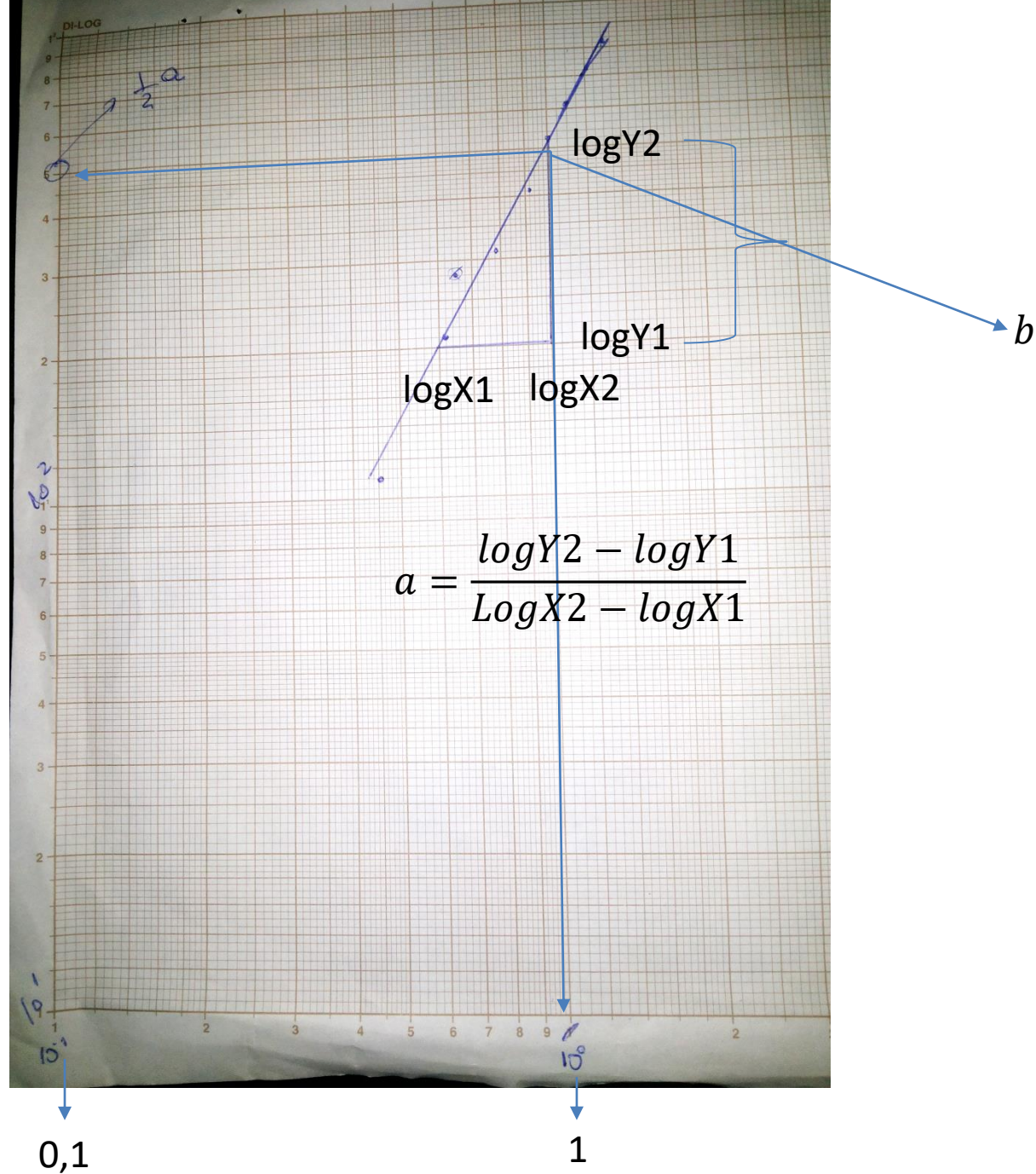


Gráfico em Papel Monolog

- Se a base é **decimal** ou **exponencial**

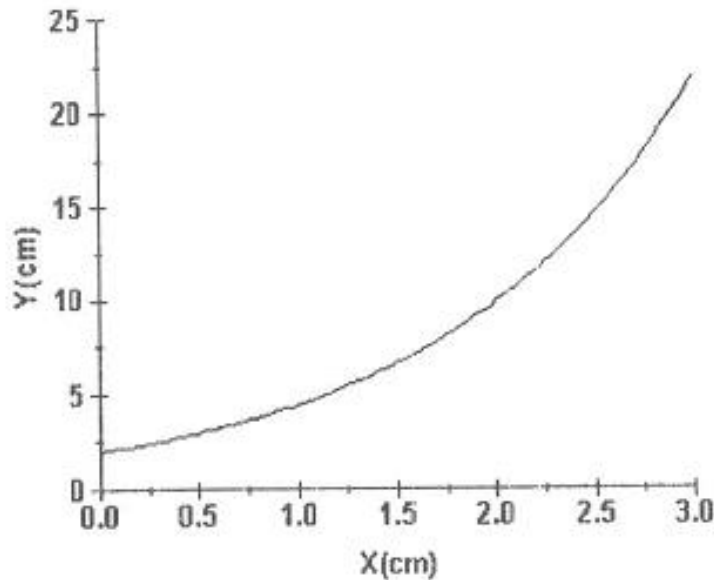


Figura 5.10 - Gráfico da função $y(x) = A \exp(Bx)$, mais precisamente $y(x) = 2 \exp(0,8x) = 2 e^{0,8x}$.

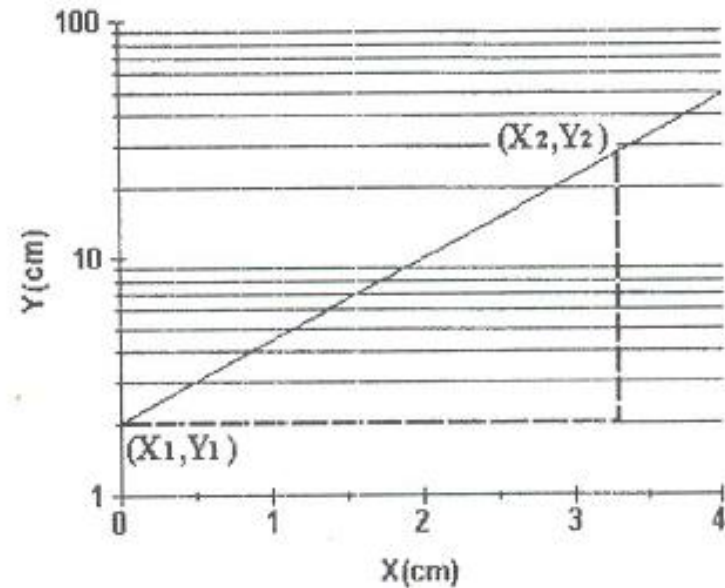
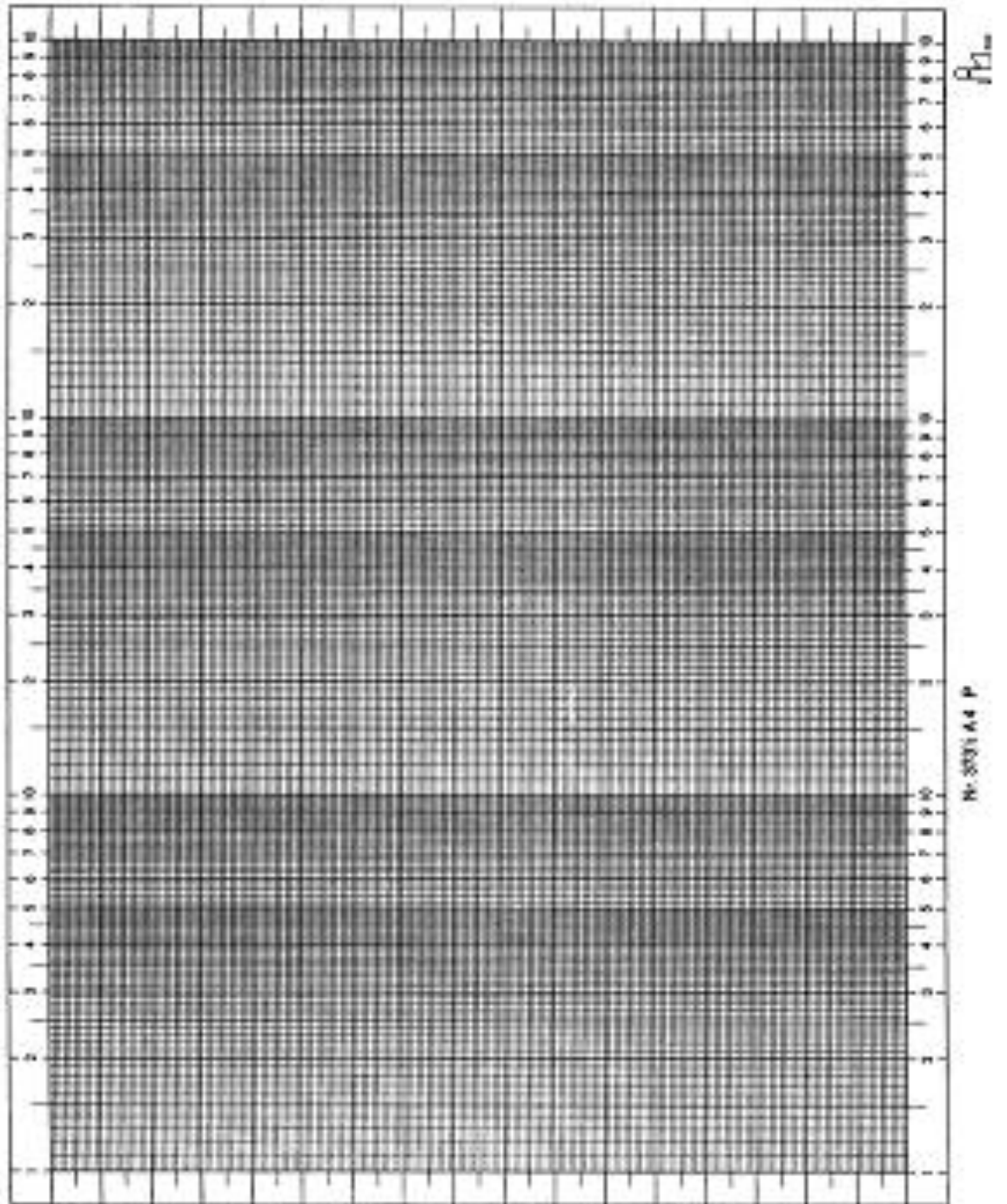


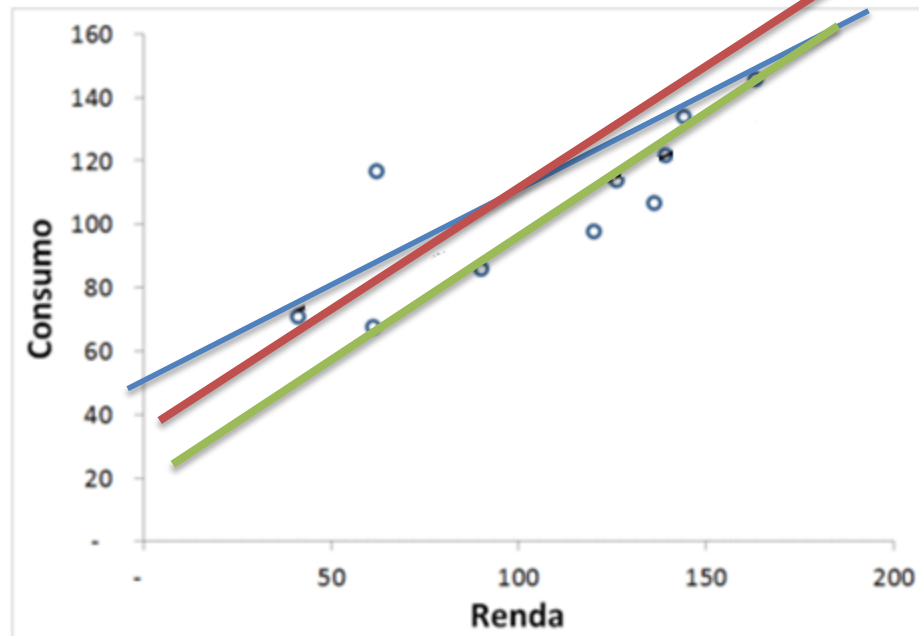
Figura 5.11 - Gráfico em papel monolog da função da Fig. 5.10.

Papel monolog



Anexos

Método dos Mínimos Quadrados

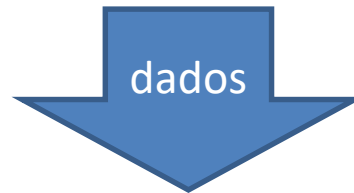


Método dos Mínimos Quadrados

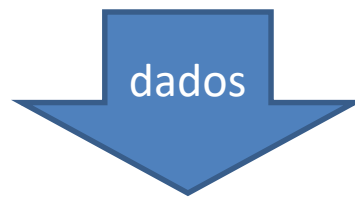
- Queremos estimar

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon$$

ε : Erro - representa a variação de y que não é explicada pelo modelo.



$$y_i = \alpha x_i + b + e_i$$



$$y_i = ax_i + b + e_i$$

O método dos mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrado dos resíduos, ou seja, minimiza $\sum_{i=1}^n e_i^2$.

$$e_i = y_i - b - ax_i$$

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i) = 0 \quad (01)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - b - ax_i) = 0 \quad (02)$$

Na equação
02,
distribuindo
o somatório
e dividindo
por 2n
teremos

$$\frac{-2 \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i)}{2n} = \frac{0}{2n} \quad (01)$$

(02)

$$\frac{-2 \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i)}{2n} = \frac{0}{2n}$$

$$\frac{-\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n b + \sum_{i=1}^n ax_i}{n} = 0$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} + \frac{b \sum_{i=1}^n 1}{n} + \frac{a \sum_{i=1}^n x_i}{n} = 0$$

$$-\bar{y} + b + a\bar{x} = 0$$

$$\sum_{i=m}^n 1 = n+1-m$$

$$b = \bar{y} + a\bar{x} \quad (03)$$

$$b = \bar{y} + a\bar{x} \quad (03)$$

Substituindo a equação 03 na equação 01 e isolando a teremos

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})} \quad (04)$$

Dica para obter a e b

Dica: Monte a tabela abaixo. No exemplo, dados do MRU

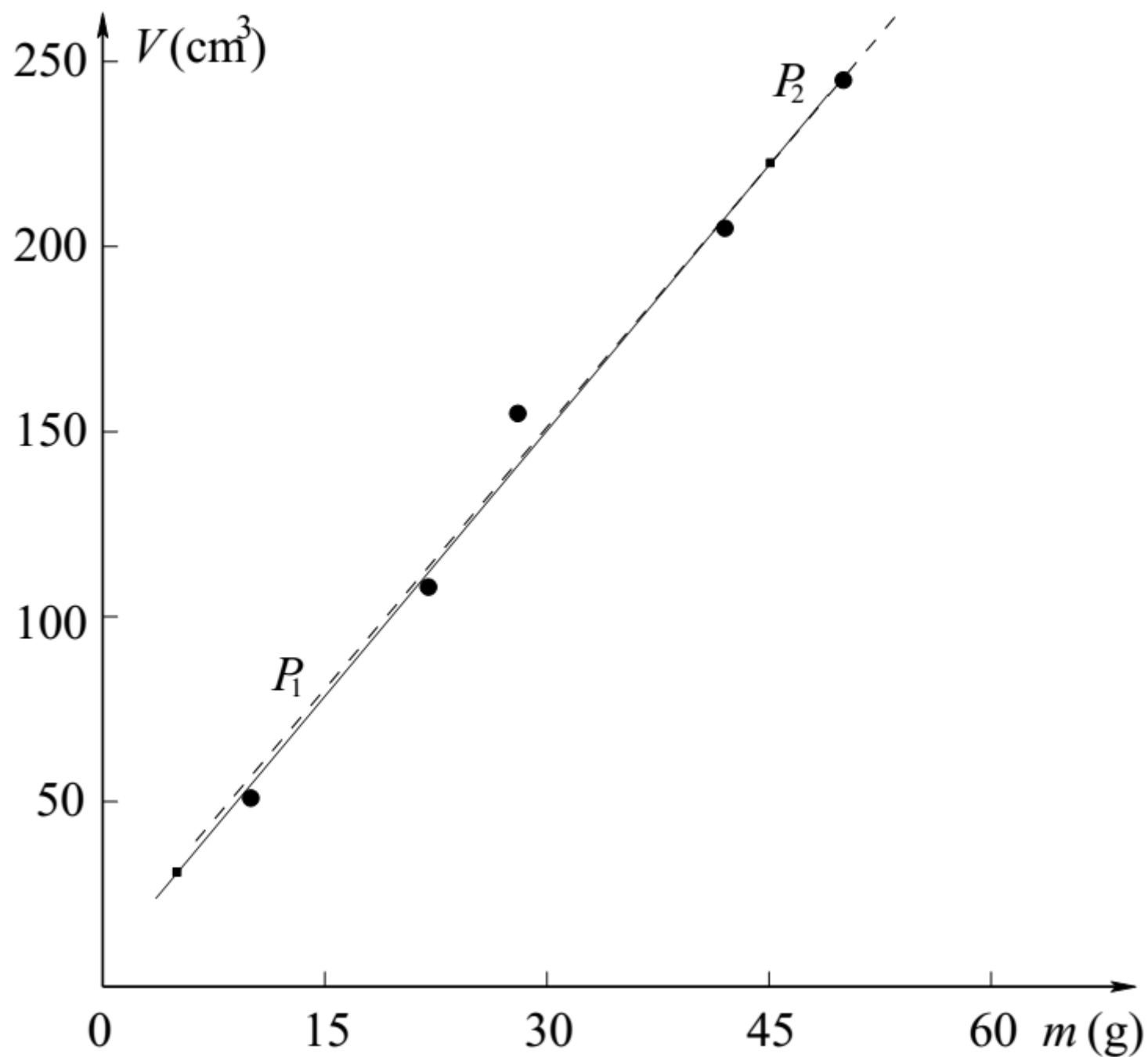
y_i	x_i	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})$	$x_i(y_i - \bar{y})$	$x_i(x_i - \bar{x})$
0,10	0,775				
0,20	1,325				
0,30	1,873				
0,40	2,525				
0,50	3,073				
$\bar{y}=0,3$	$\bar{x}=1,914$				

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i(x_i - \bar{x})}$$

$$b = \bar{y} + a\bar{x}$$

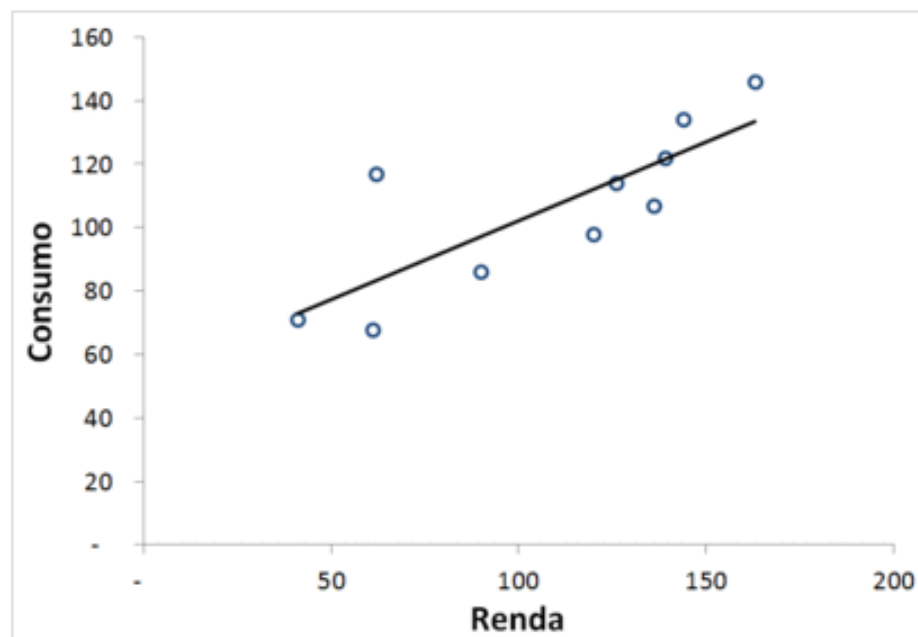
Após obter a e b pelo MMQ, use esses novos a e b e os x_i 's para obter os novos y_i 's

$$y_i = ax_i + b$$



Considere a seguinte base de dados:

i	y Consumo	x Renda
1	122	139
2	114	126
3	86	90
4	134	144
5	146	163
6	107	136
7	68	61
8	117	62
9	71	41
10	98	120



Aplicando as fórmulas acima, chega-se em:

$$a = \frac{7.764,40}{15.671,60} = 0,4954$$

$$b = 106,30 - 0,4954 \times 108,20 = 52,69$$

portanto,

$$\text{Consumo} = 0,4954 \times \text{Renda} + 52,69$$

Interpretação: Tirando a parte do Consumo que não é influenciada pela Renda, o incremento de \$ 1 na Renda causa um incremento esperado de \$ 0,4954 no Consumo.

Fazendo o gráfico dos resultados da tabela 1 com a tabela 3 temos:

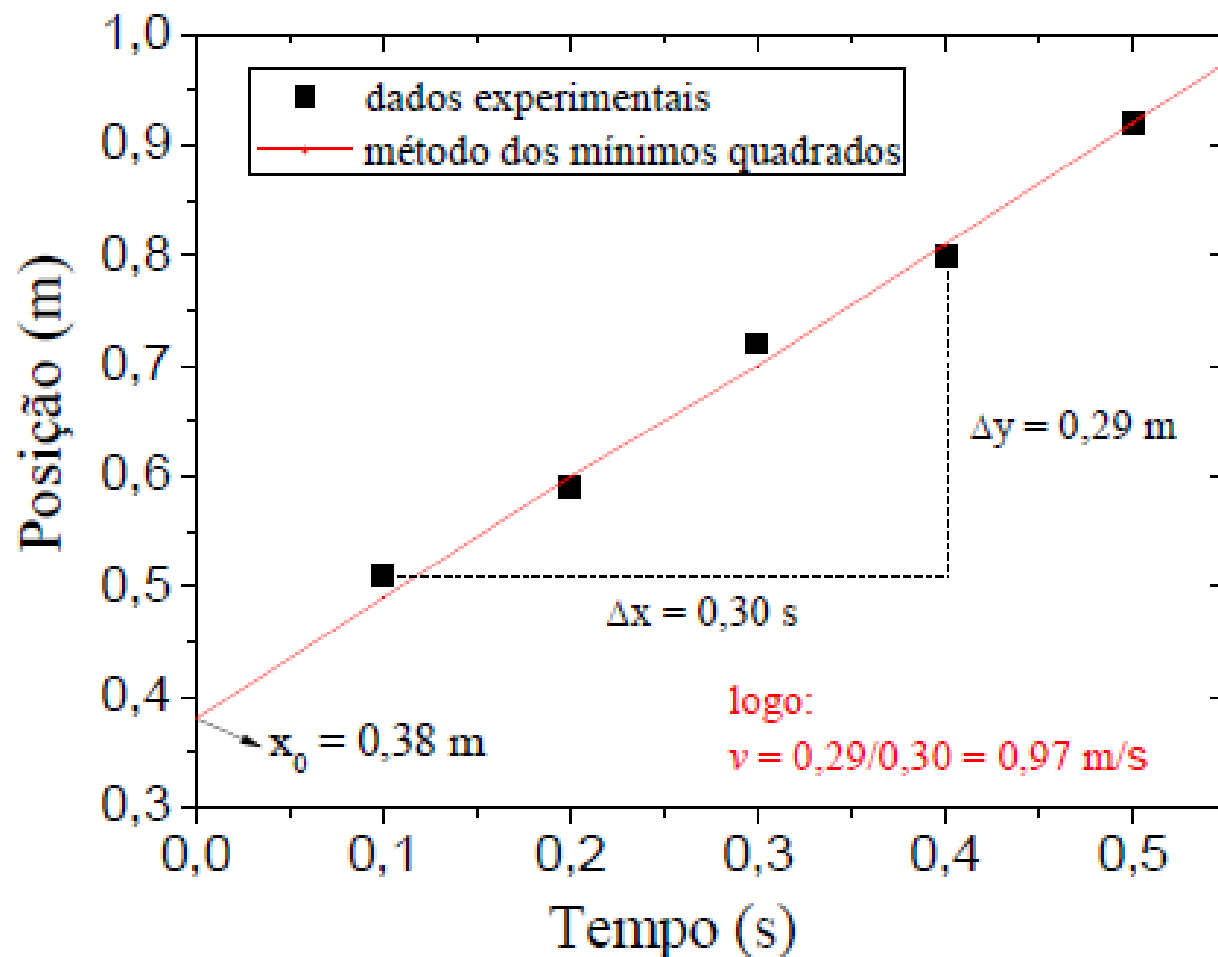


Figura 1. Evolução da posição do móvel em função do tempo.

Observe que o valor da velocidade calculado pelos dados da tabela 1 é igual a 0,97 m/s enquanto que para a curva determinada pelo método dos mínimos quadrados é de 1,08 m/s, ou seja, este é o valor mais próximo do valor real da velocidade do carrinho.

Exercício

- Fazer o gráfico de $M \times V$ e obter a densidade

Y Massa(g)	X Volume (cm3)
37,96	4,9
99,96	12,25
124,53	15,98
202,65	26,10
259,63	33,24

Referências

- Vuolo, J. H. Fundamentos da teoria de erros, 2ª edição, Ed. Edgard Blucher, São Paulo, 1996.
- Apostila Física Experimental UFPR