

# **Física Experimental 1**

## ***Introdução à Teoria de Erros***

**Prof. Dr. Walmor Cardoso Godoi**

Departamento de Física

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

<http://wfisico.wix.com/godoi>

# Introdução

- Objetivos
  - Introduzir o estudante em Metodologia Científica por meio da abordagem experimental.
  - Realizar a aplicação da teoria em problemas reais.
  - Analisar de dados.
  - Desenvolver “consciência de erro instrumental e de medidas”.
  - Familiarizar-se no uso de instrumentos de medida analógicos e digitais.
  - Utilizar-se de ferramentas como tabelas, análise diferencial para propagação de erros e cálculo numérico, confecção de gráficos em papel e computador.
  - Introduzir o estudante na edição de relatórios técnicos-científicos e artigos científicos.

# Um breve histórico das medidas

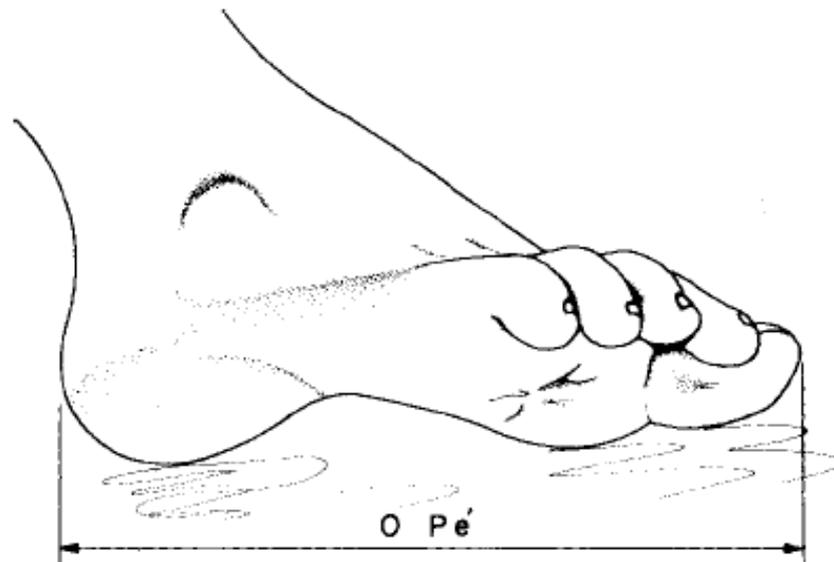
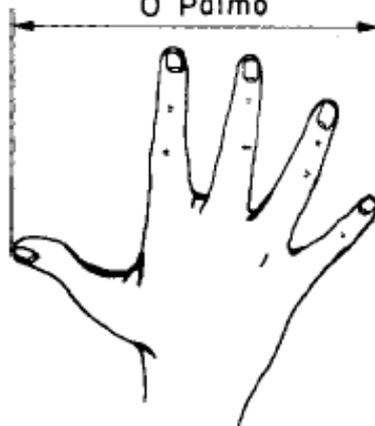
- Como fazia o homem, cerca de 4.000 anos atrás, para medir comprimentos?
  - As unidades de medição primitivas estavam baseadas em **partes do corpo humano**, que eram referências universais, pois ficava fácil chegar-se a uma medida que podia ser verificada por qualquer pessoa.
  - Foi assim que surgiram as unidades de medidas como a polegada, o palmo, o pé, a jarda, a braça e o passo.

# Um breve histórico das medidas

A Polegada



O Palmo



✓ Galileu- Galilei (1667)

# E os avanços?

## Exemplo, medir a velocidade da Luz

### The Speed of Light: Some Selected Measurements

Date	Experimenter	Country	Experimental Method	Speed ( $10^8$ m/s)	Uncertain (m/s)
1600	Galileo	Italy	Lanterns and shutters	"Fast"	?
1676	Roemer	France	Moons of Jupiter	2.14	?
1729	Bradley	England	Aberration of light	3.08	?
1849	Fizeau	France	Toothed wheel	3.14	?
1879	Michelson	United States	Rotating mirror	2.99910	75,000
	Michelson	United States	Rotating mirror	2.99798	22,000
1950	Essen	England	Microwave cavity	2.997925	1,000
1958	Froome	England	Interferometer	2.997925	100
1972	Evenson et al.	United States	Laser method	2.997924574	1.1
1974	Blaney et al.	England	Laser method	2.997924590	0.6
1976	Woods et al.	England	Laser method	2.997924588	0.2
1983	Internationally adopted value:			2.99792458	Exact

### Roemer's Drawing of Io's Jupiter Eclipse

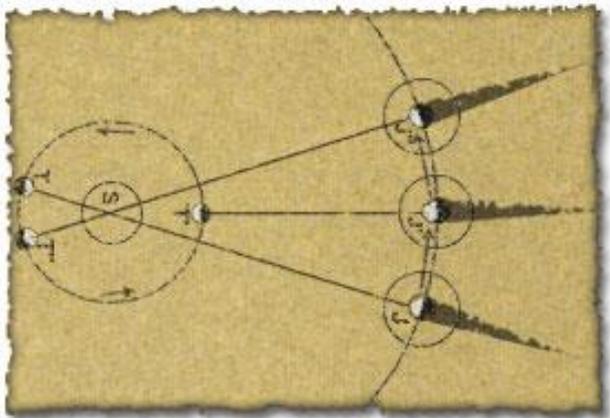
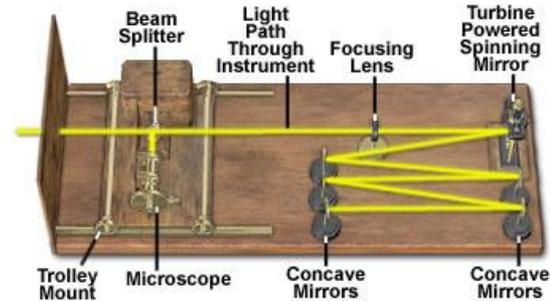


Figure 3

(1676)

### Foucault's Spinning Mirror Device



(1864)

Figure 4

### Michelson-Morley Interferometer

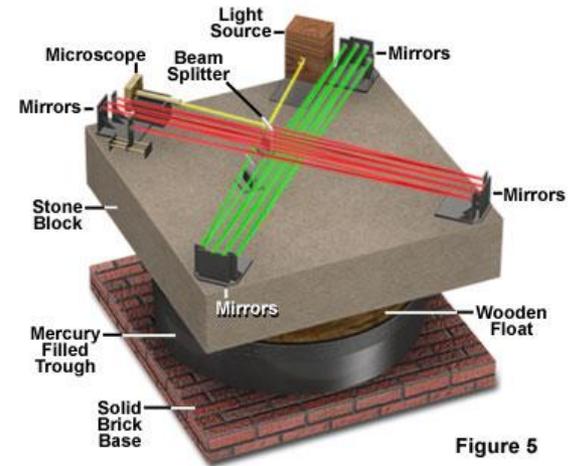
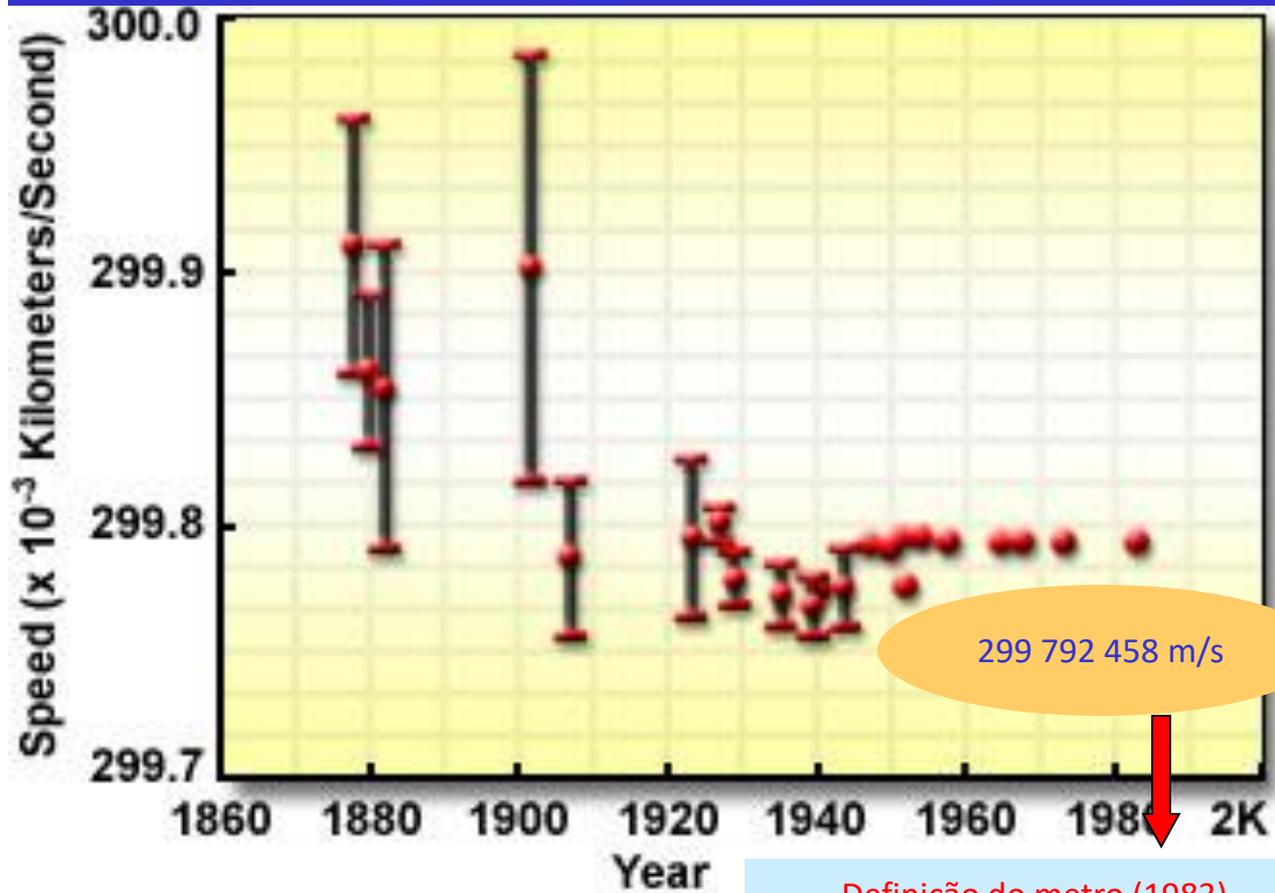


Figure 5

(1879)

✓ Medidas da Velocidade da Luz (1878-1983)

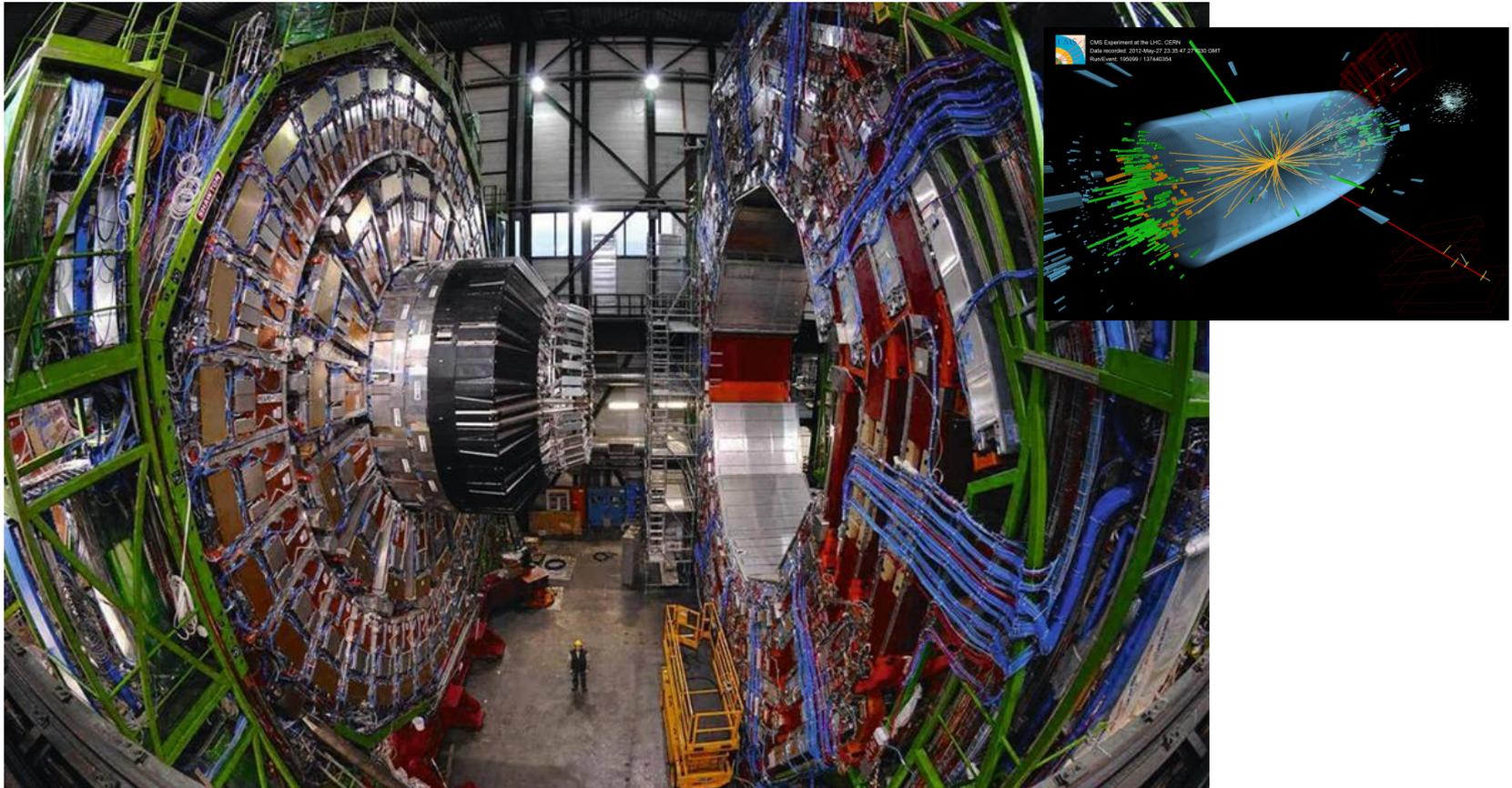


# E hoje?

- Avanços tecnológicos
- Avanços rápidos
  - Metodologia x Instrumentos
- Procurar desenvolver atitudes para observar, indagar e descobrir
- Especulações sobre a natureza x testes experimentais

# LHC

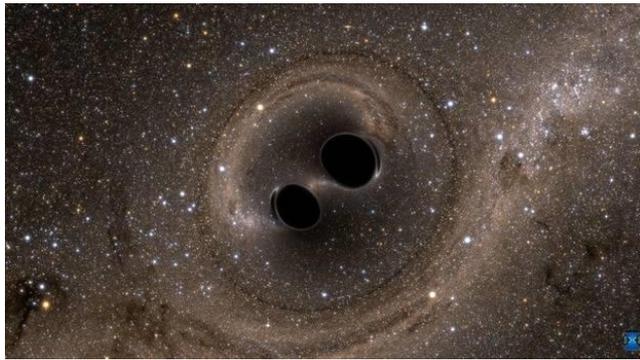
- O Grande Colisor de Hádrons (em inglês: Large Hadron Collider) – da Organização Europeia para a Pesquisa Nuclear, CERN, 2008



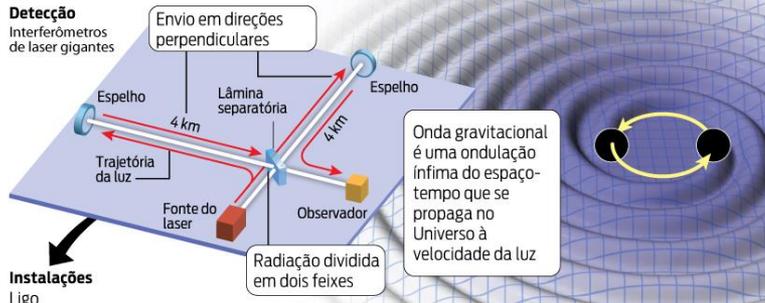
Fonte: <https://home.cern/topics/large-hadron-collider>

# Detecção de Ondas Gravitacionais

- Experimento Ligo



Ondas detectadas em 14 de set. às 14:51h (Bras.)  
Origem: fusão de 2 buracos negros há 1,3 bilhões de anos



**Instalações**  
Ligo  
2 detectores equipados com interferômetros



**Albert Einstein**

As ondas foram apresentadas de forma conceitual há 100 anos pelo famoso físico como uma consequência de sua Teoria Geral da Relatividade



Conseguir detectá-las torna possível remontar o primeiro milissegundo do Big Bang

# Medidas

- **Medição** – ato ou efeito de medir
- **Medida** – Valor numérico (e unidade padrão)
- **Dados experimentais** – Valores obtidos nas medições diretas
- **Resultados experimentais** – valores obtidos após cálculos com os dados experimentais

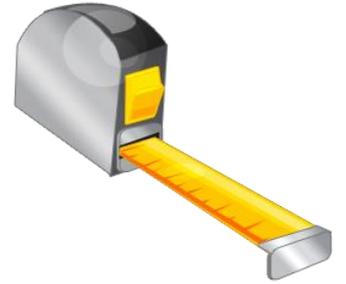
# Tipos de Medição

- 1. Medição direta
  - Comprimento de uma mesa
- 2. Medição indireta
  - Área de uma mesa

# Valor verdadeiro do mensurando

- O ***mensurando*** é a grandeza a ser determinada num processo de medição.
- Em geral o ***valor verdadeiro*** de um *mensurando* é **desconhecido** (VUOLO, 1996).
- **Todo o valor verdadeiro supõe um modelo**
  - Exemplo: diâmetro de uma bolinha de gude
    - Por exemplo, ao tomar um paquímetro para medir “o” diâmetro de uma bolinha de metal, **estamos pressupondo que essa bolinha seja perfeitamente esférica**, quando, na verdade, ela pode ser elipsoidal, oval, irregular... A rigor, essa bolinha só terá verdadeiramente um valor de diâmetro se ela for esférica, não é verdade? Assim, mesmo nas medições mais simples, é impossível determinar o mensurando sem adotar alguns pressupostos e idealizações.
- **O desconhecimento do valor verdadeiro**
  - O valor verdadeiro de uma grandeza experimental é **sempre** desconhecido (VUOLO, 1996)
  - As únicas grandezas que têm seus valores verdadeiros conhecidos exatamente são aquelas que não dependem de dados experimentais para serem determinadas. Por exemplo: a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência ( $\pi = 3,141516\dots$ ),

# Introdução



- Erros como incertezas
  - Erro *diferente* de **equivoco**, engano ...

**Erro = incerteza que acompanha  
todas as medições**

- **Objetivo da teoria de erros**

- Determinar o *melhor valor possível* para a grandeza a partir das medições.
- Determinar quanto o *melhor valor obtido* pode ser diferente do *valor verdadeiro*.
- *Melhor valor = melhor estimativa ou valor experimental*

$$\textit{erro} = \textit{melhor estimativa} - \text{valor verdadeiro} ?$$

# Por que medir?

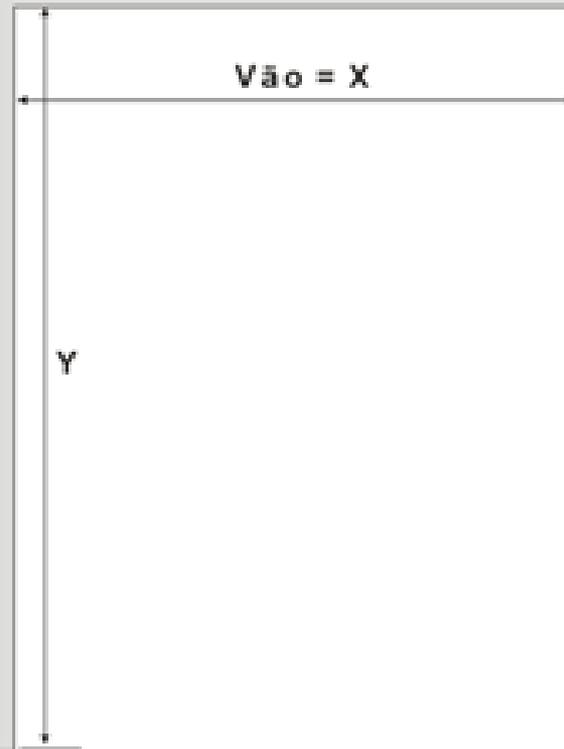
*“O desenvolvimento e a consolidação da **cultura metrológica** vêm-se constituindo em uma estratégia permanente das organizações, uma vez que resultam em **ganhos de produtividade, qualidade dos produtos e serviços, redução de custos e eliminação de desperdícios**. A construção de um senso de **cultura metrológica** não é tarefa simples, requer ações duradouras de longo prazo e depende não apenas de treinamentos especializados, mas de uma ampla difusão dos valores da qualidade em toda a sociedade.”*

# Vamos medir a altura de uma porta

## Fontes de Incerteza?

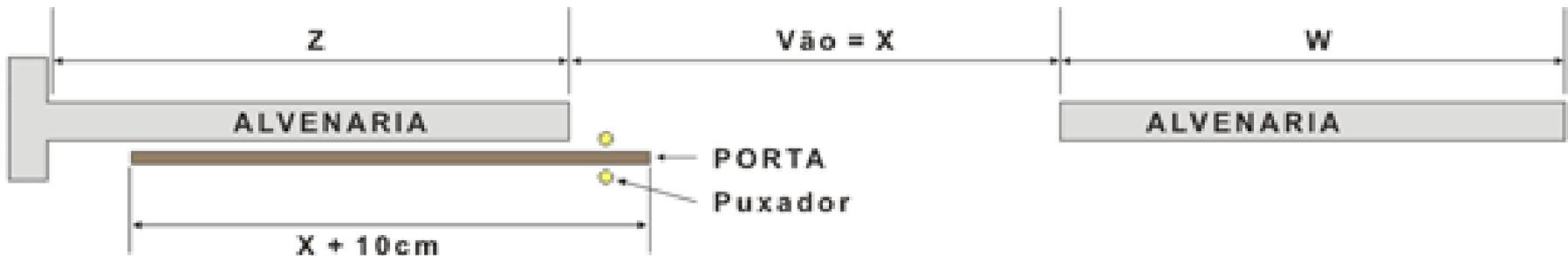
- Trena a laser  
Precisão de medição  
 $\pm 2 \text{ mm}$

- Interferômetro a laser  
Precisão de medição  
 $\pm 0,5 \times 10^{-6} \text{ m}$  (ou  
 $0,0005 \text{ cm}$ )



Y medida grosseira  
(estimado 210 cm)  
Y sujeito a incerteza  
estimada  
(205 cm até 215 cm)

Y com trena  
(211,3 cm )  
Variando de 221,25 a  
211,35  
Precisão de medição  
 $\pm 0,5 \text{ mm}$  (ou 0,05 cm)



# Medindo considerando o erro

- Dois especialistas são indagados a verificar se uma coroa é feita de ouro 18 quilates ou com uma liga mais barata.

Sabendo que

$$\rho_{\text{ouro}} = 19,3 \text{ gramas/cm}^3$$

e

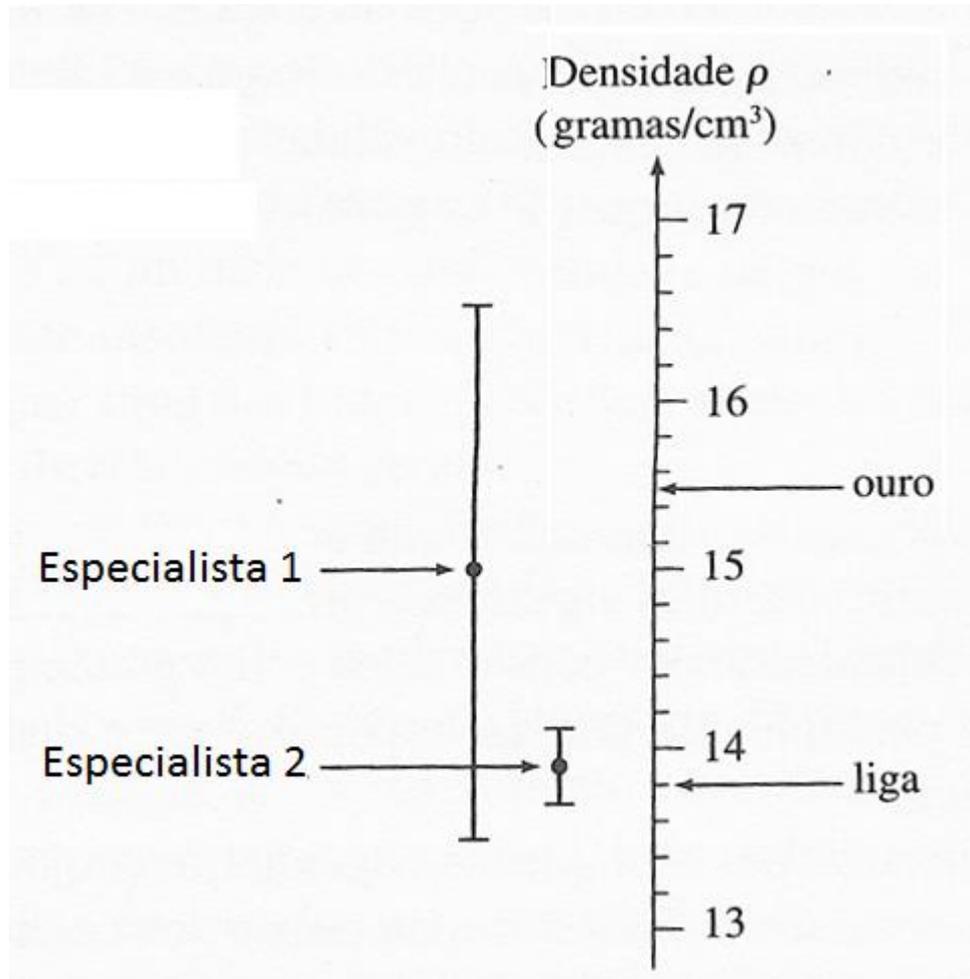
$$\rho_{\text{liga}} = 13,8 \text{ gramas/cm}^3$$



$$\rho_{\text{ouro}} = 15,5 \text{ gramas/cm}^3$$

$$\rho_{\text{liga}} = 13,8 \text{ gramas/cm}^3$$

# Introdução



- Especialista 1
  - Melhor estimativa 15 g/cm<sup>3</sup>
  - *Variação de 13,5 até 16,5*
- Especialista 2
  - Melhor estimativa 13,9 g/cm<sup>3</sup>
  - *Variação de 13,7 até 14,1*

## Medida de uma Grandeza



**Medida = Valor mais provável  $\pm$  incerteza**

**Média**

**Dois tipos: A ou B**

**Lembrando Erro:** É a *diferença* entre o valor medido e o “valor verdadeiro” da grandeza em análise.

**Incerteza:** parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a *dispersão* de valores que podem ser atribuídos ao mensurando.

## Tipos de Incerteza

- ✓ **Tipo A:** É a incerteza avaliada a partir da análise de uma série de observações, realizada conforme métodos da estatística.
- ✓ **Tipo B:** É a incerteza avaliada por quaisquer outros métodos, que não os estatísticos clássicos.

# Como relatar e usar incertezas

**Medida = melhor estimativa  $\pm$  incerteza**



# Tipos de Erros

## Erros sistemáticos

**sempre e só no mesmo sentido;  
sempre o mesmo em n resultados.**

**Ex: erro instrumental**

# Tipos de Erros

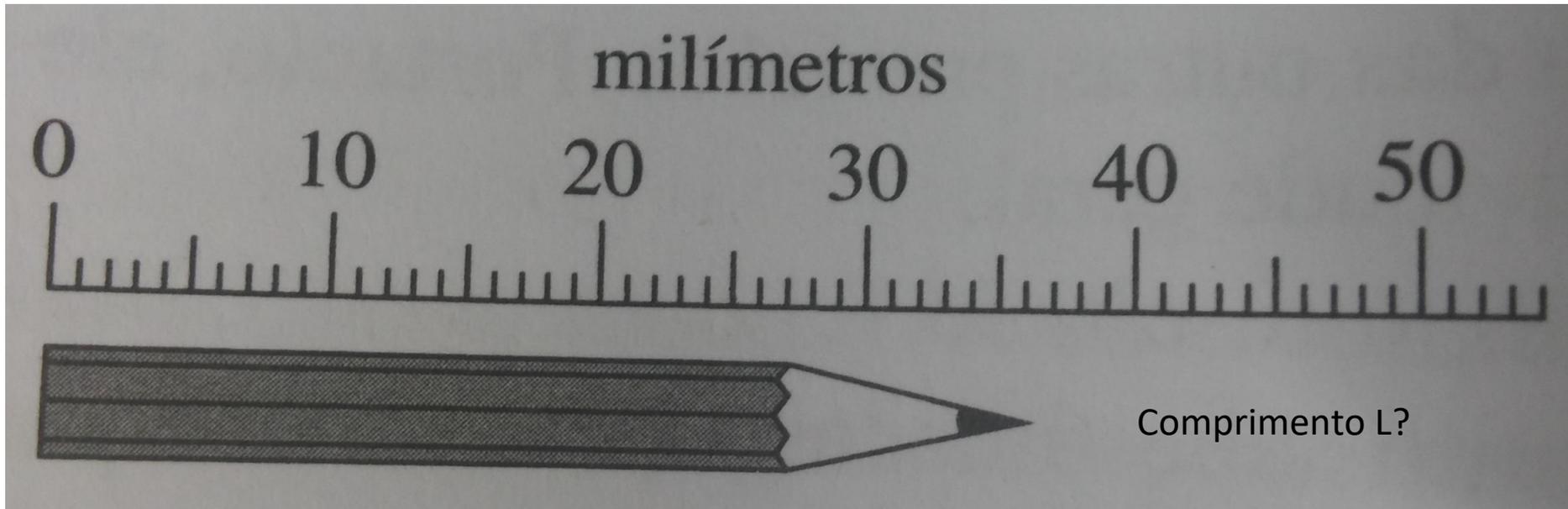
## Erros aleatórios (ou estatístico):

sem qualquer regularidade; inevitáveis;  
estimativas dependem de pessoa para pessoa

Estimativas dependem de medição para medição;

Ex: variações no ambiente do laboratório,  
limitações dos instrumentos de medida,...

# Erro instrumental



$$x-a \leq x \leq x+a \quad (\text{intervalo de confiança})$$

Melhor estimativa para  $L = 36,5$  mm

Intervalo provável: 36,0 a 37,0 mm

$$36,0 \text{ mm} \leq L \leq 37,0 \text{ mm}$$

Incerteza de  $\pm 0,5$  mm

# Erro instrumental instrumento analógico

- Leitura com erro instrumental ( **uma** medida),  
O erro será a menor medida do instrumento dividida por dois, **mantendo a precisão do instrumento**

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \pm \Delta\mathbf{x} / 2)$$



# Erro instrumental

## Uma única medida - incerteza

**Quando efetuamos uma única medida tomamos como incerteza da medida a metade da menor subdivisão.**

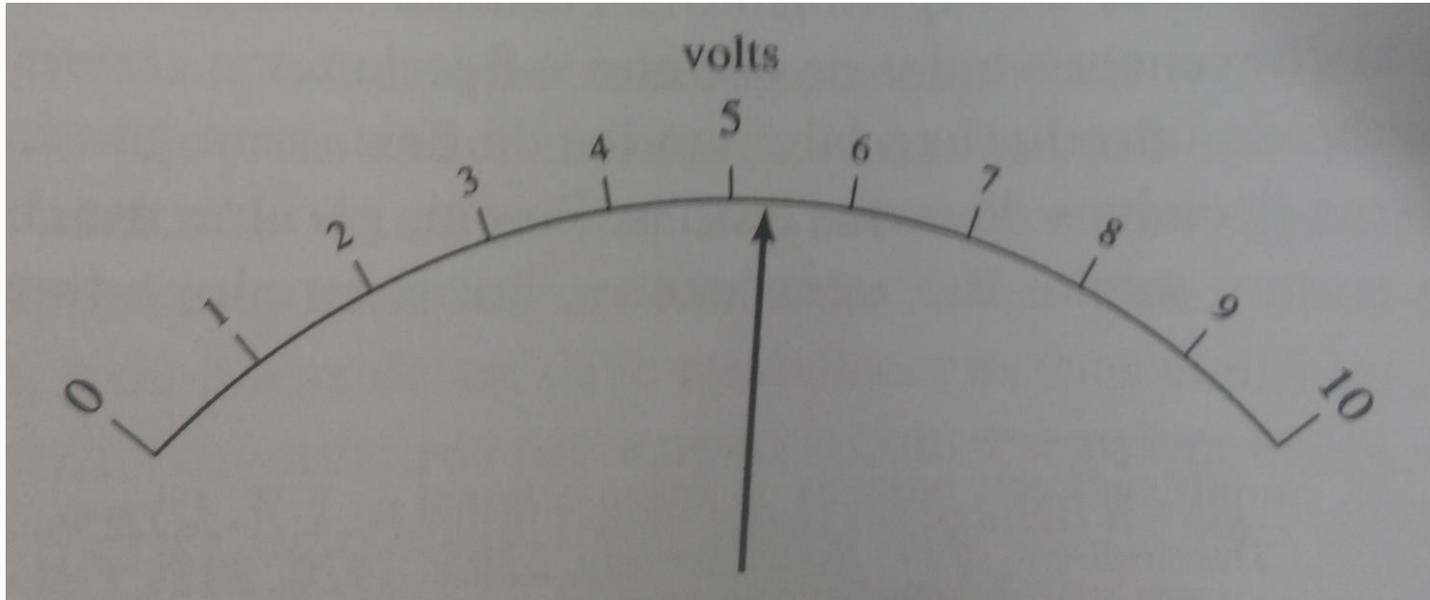
### **Exemplo:**

- Efetuando uma medida de um comprimento - largura de uma mesa, por exemplo: **62 cm** utilizando uma trena com precisão de **1 mm**.
- A incerteza na medida será de: **0,5 mm** que corresponde à metade da menor divisão da trena.
- Tal que a representação ficará então

$$L = (620,0 \pm 0,5)mm = (62,00 \pm 0,05)cm$$

O que significa que o valor medido está entre **619,5 mm e 620,5 mm**, ou seja, possui uma incerteza de **0,5 mm** para mais ou para menos.

# Erro instrumental



- Melhor estimativa: 5,3 V
- Intervalo provável 4,8 V a 5,8 V  
Incerteza de +/- 0,5 V

# Erro instrumental

**leitura = 3,6**

campo de medida = 60V

logo,

$m = \text{campo de medida} / 5 = 12 \text{ V}$

e o valor da tensão medida é (melhor medida):

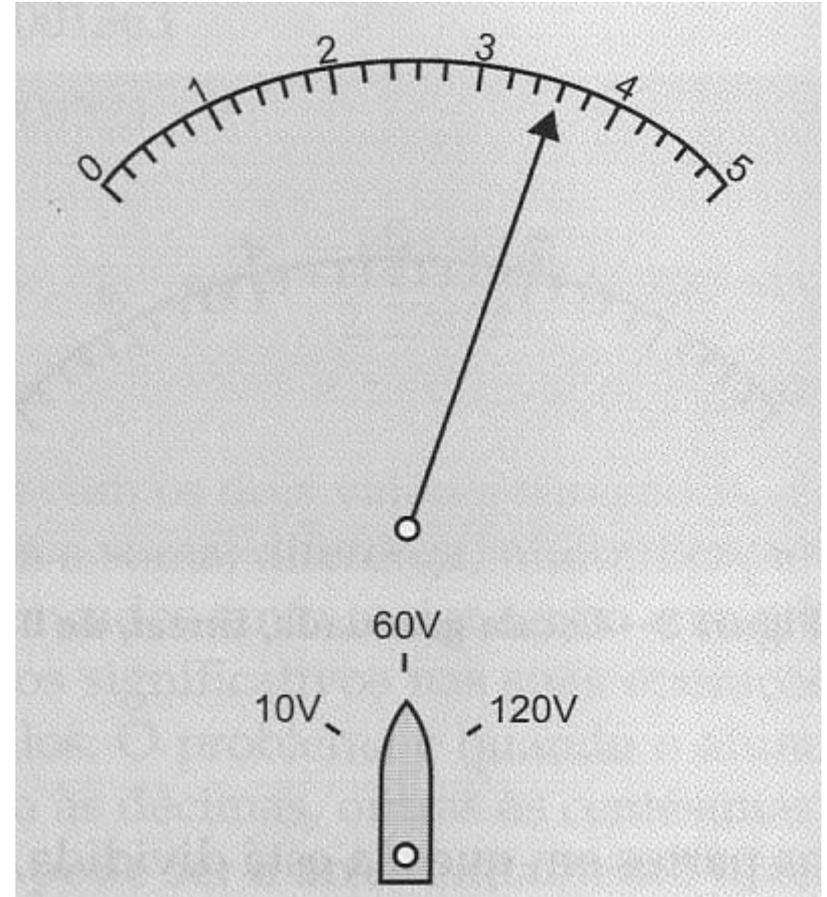
$U(\text{V}) = \text{leitura} \times m = 3,6 \times 12 = 43,2\text{V}$

**Incerteza?**

Menor medida  $12 \text{ V} / 5 = 2,4 \text{ V}$

Incerteza =  $2,4 / 2 = 1,2\text{V}$

Incerteza = 1,2 V



# Erro instrumental

## Equipamentos digitais

- Um equipamento digital possui especificações fornecidas pelo fabricante que determinam o limite de erro ( $L$ ) para uma medida



# Erro instrumental

## Equipamentos digitais

- Um equipamento digital possui especificações fornecidas pelo fabricante que determinam o limite de erro ( $L$ ) para uma medida

$$\text{Erro} = x\% \text{Leitura} + yD$$

Onde  $D$  é a resolução do equipamento



# Erro Instrumental – Equipamento digital

Foi utilizado as medidas mostradas no display de uma fonte Minipa modelo MPL 1303M para medir tensão e corrente.

Fabricante:

- erro  $U = \pm(1\% \text{ Leitura} + 2D)$ 
  - para resolução em  $100\text{mV} = 0,1 \text{ V}$
- erro de  $i = \pm(1\% \text{ Leitura} + 2D)$ 
  - para resolução em  $10\text{mA} = 0,01 \text{ A}$
- Se as leituras foram  $U=30,9 \text{ V}$  e  $i=3,15 \text{ A}$ , quais os erros de  $U$  e  $i$ ?



# Erro Instrumental – Equipamento digital

- Balança usada no laboratório:
  - Resolução  $d=0,01\text{g}$
  - Erro
    - $e=10d$  (não leva em conta a leitura)
- Qualquer medida terá um erro de  $0,10\text{ g}$

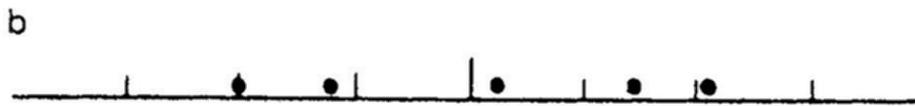


# Erros Aleatórios

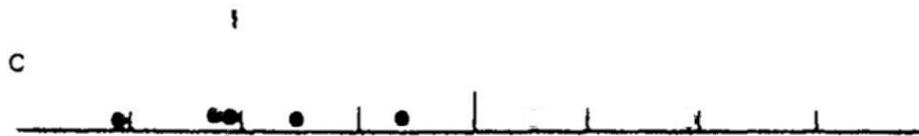
## Precisão e Exatidão



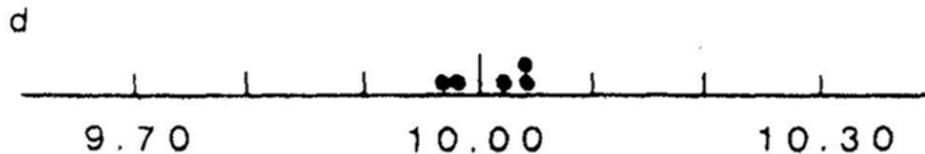
**Boa precisão: baixa dispersão de resultados.  
Erros aleatórios pequenos.  
Fracá exatidão: Existência de erros sistemáticos:  
resultado não exato.**



**Fracá precisão: grande dispersão de resultados.  
Erros fortuitos elevados.  
Boa exatidão: Não existência de erros  
sistemáticos: resultado exato.**



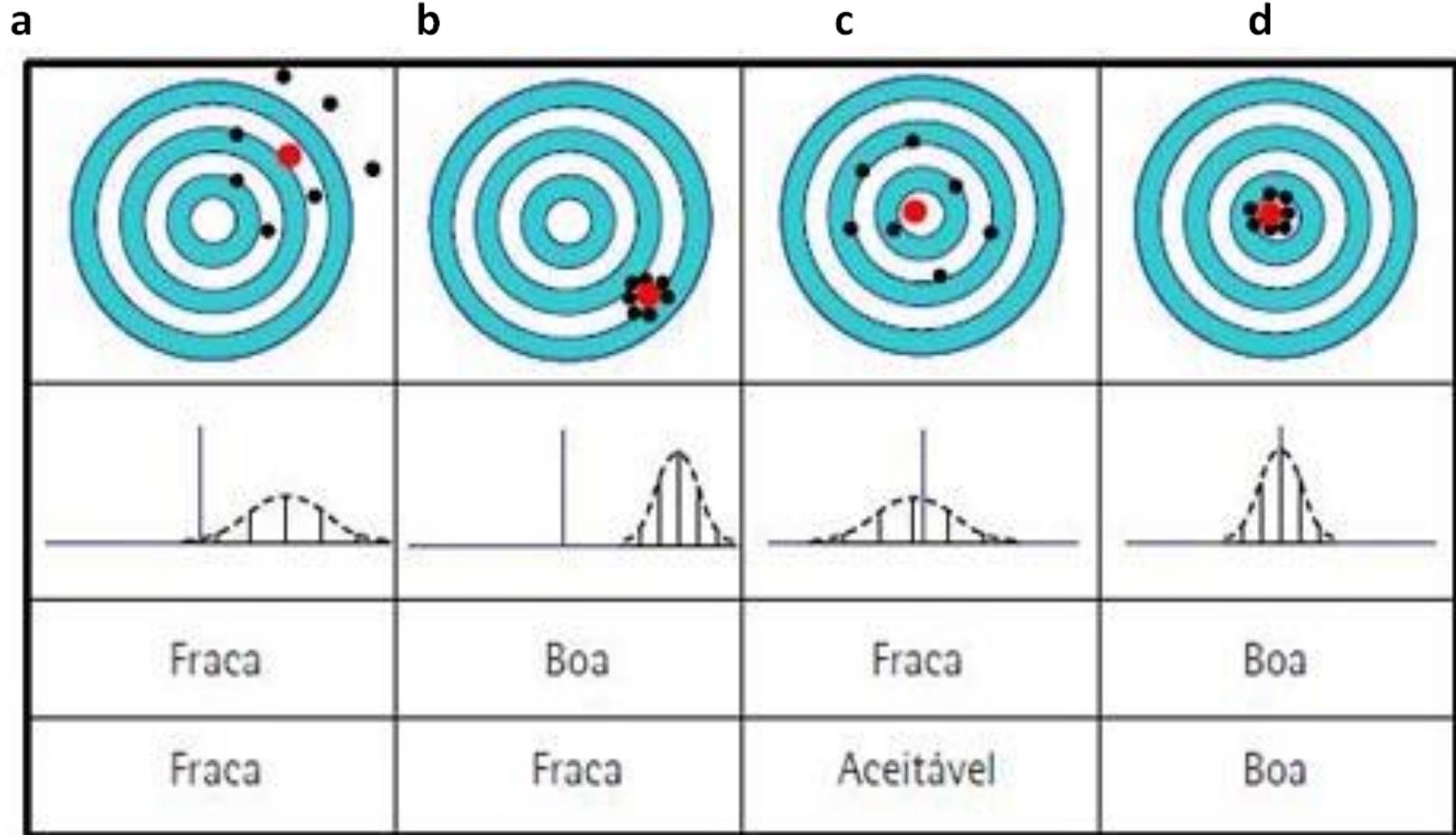
**Fracá precisão: grande dispersão de resultados.  
Erros aleatórios elevados.  
Fracá exatidão: Existência de erros  
sistemáticos: resultado não exato.**



**Boa precisão: baixa dispersão de resultados.  
Erros aleatórios pequenos.  
Boa exatidão: Não existência de erros  
sistemáticos: resultado exato.**

# Erros Aleatórios

## Precisão e Exatidão



# Tipos de Erros

## ✓ Erros Aleatórios

AFETAM A  
**PRECISÃO**  
DAS MEDIDAS  
*"precision"*

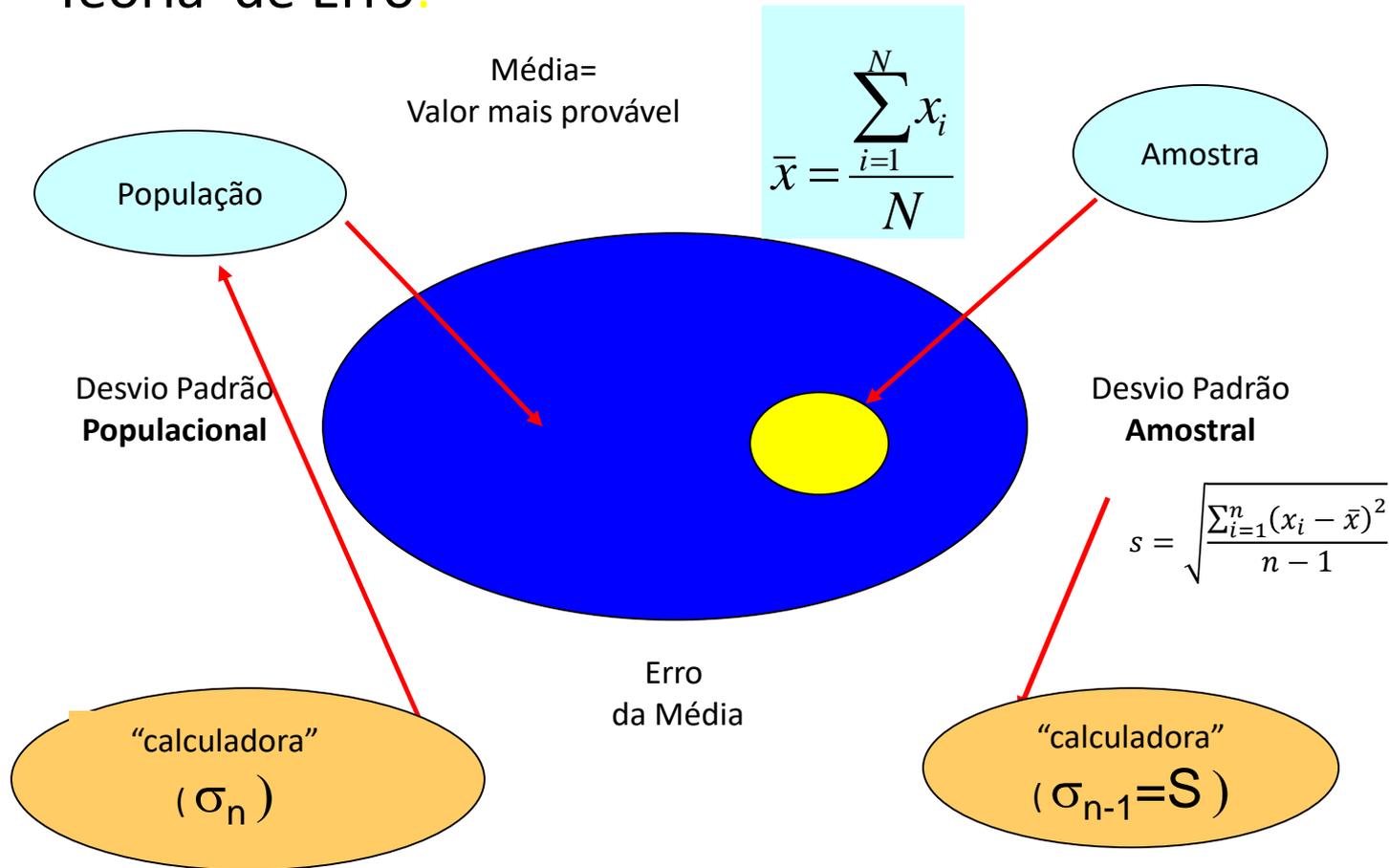
## ✓ Erros Sistemáticos

AFETAM A  
**EXATIDÃO**  
DAS MEDIDAS  
*"accuracy"*

# Formas mais usuais de indicar a incerteza $\delta x$

- **Incerteza padrão ( $\sigma$ )** = desvio padrão da distribuição de erros

# Teoria de Erro:



# Formas mais usuais de indicar a incerteza $\delta x$

- **Incerteza padrão (s)** = desvio padrão da distribuição de erros

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Desvio padrão amostral

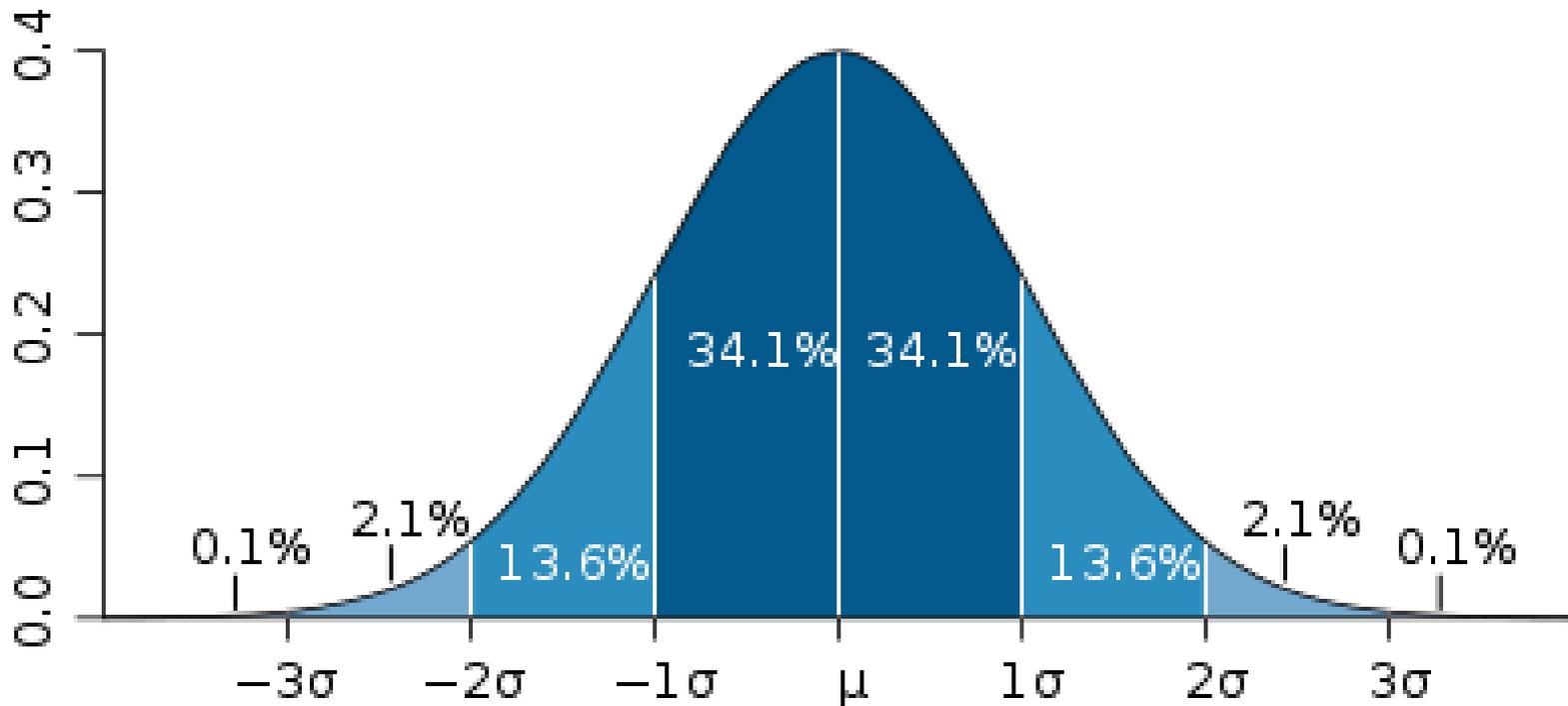
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Média aritmética

# Formas mais usuais de indicar a incerteza $\delta x$

- Incerteza padrão ( $\sigma$ ) = desvio padrão da distribuição de erros
- **Incerteza expandida com confiança P ( $k\sigma$ )**

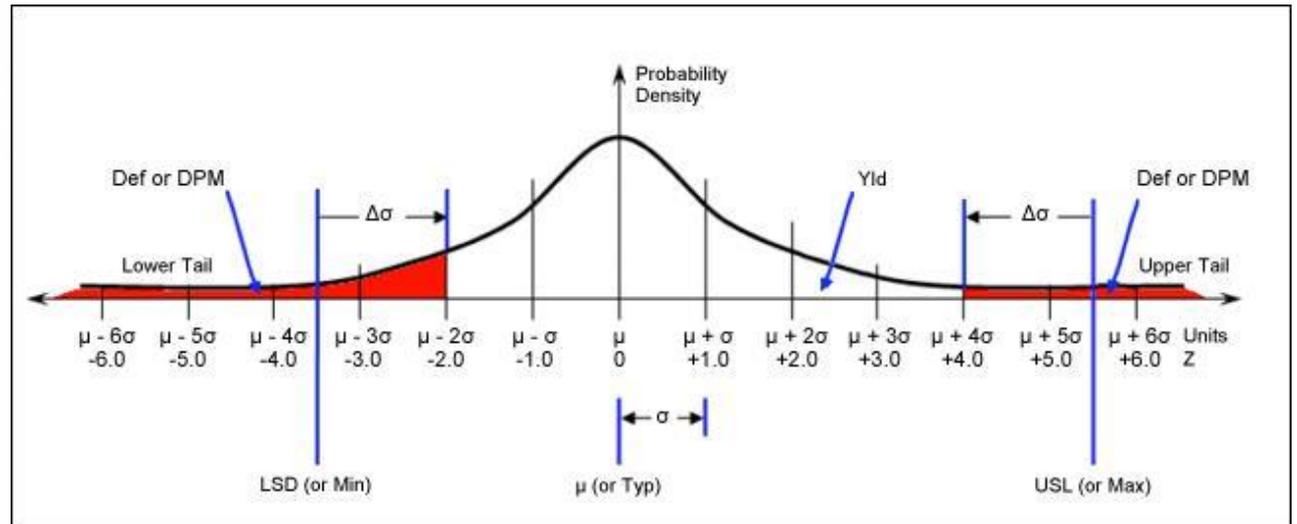
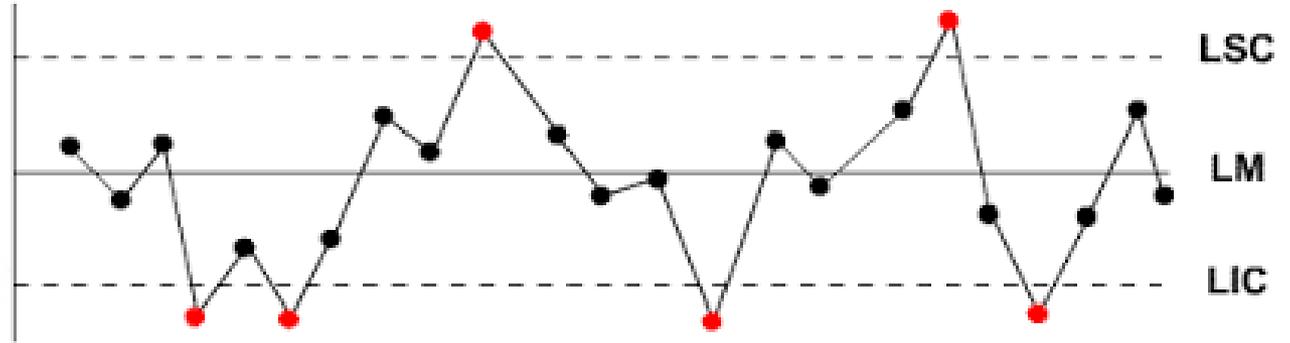
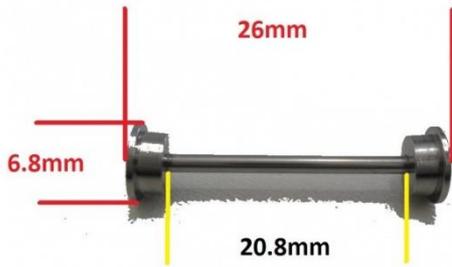
- Para  $1\sigma$  (68,27 % de confiança),  $2\sigma$  (95,45 %),  $3\sigma$  (99,73 %) para uma distribuição gaussiana





Modelo 2

26mm



# Formas mais usuais de indicar a incerteza $\delta x$

- Incerteza padrão ( $\sigma$ ) = desvio padrão da distribuição de erros
- Incerteza expandida com confiança P ( $k\sigma$ )
  - Para  $\sigma$  (68,27 % de confiança),  $2\sigma$  (95,45 %),  $3\sigma$  (99,73 %) para uma distribuição gaussiana
- **Limite de erro (L):** Valor máximo admissível para o erro (especificações técnicas de instrumentos)

# Formas mais usuais de indicar a incerteza $\delta x$

- Incerteza padrão ( $\sigma$ ) = desvio padrão da distribuição de erros
- Incerteza expandida com confiança P ( $k\sigma$ )
  - Para  $\sigma$  (68,27 % de confiança),  $2\sigma$  (95,45 %),  $3\sigma$  (99,73 %) para uma distribuição gaussiana
- Limite de erro (L): Valor máximo admissível para o erro (especificações técnicas de instrumentos)
- Erro absoluto e erro relativo (%)

# Erro absoluto e erro relativo

- **Erro Absoluto**

- É a diferença entre o valor exato de um determinado **número (x)** e o seu **valor aproximado (x')**.

$$E_a = |x - x'|$$

- **Erro Relativo**

- É a razão entre o erro absoluto e o **valor exato (x)**

$$E_r = E_a/x$$

- **Erro percentual**

- é a representação percentual do erro relativo.

# Formas mais usuais de indicar a incerteza $\delta x$

## Erro absoluto e erro relativo

- **Exemplo:**
- Queremos saber quanto é a estimativa de distância de uma árvore para outra, seguindo passos largos podemos perceber que a distância entre elas é de **18 metros** (valor  $x'$ ). Em seguida, você realiza uma medição com uma fita métrica, mede a mesma distância e descobre que, na verdade, elas estão a  $x=20$  metros de distância uma da outra.

- O erro absoluto é

$$E_a = |x - x'| = 20 - 18 = 2 \text{ metros.}$$

- O erro relativo,

$$E_r = E_a/x = 2/20 = 2/20 = 0,1$$

- O erro percentual

$$E_r(\%) = 0,1 \times 100 = 10\%$$

# Formas mais usuais de indicar a incerteza $\delta x$

- **Incerteza padrão ( $\sigma$ )** = desvio padrão da distribuição de erros
- **Incerteza expandida com confiança P ( $k\sigma$ )**
  - Para  $\sigma$  (68,27 % de confiança),  $2\sigma$  (95,45 %),  $3\sigma$  (99,73 %) para uma distribuição gaussiana
- **Limite de erro (L):** Valor máximo admissível para o erro (especificações técnicas de instrumentos)
- **Erro absoluto e erro relativo (%)**
- **Erro combinado ( $\sigma_c$ )**

# Formas mais usuais de indicar a incerteza $\delta x$

- Erro combinado (ou erro total)\*

$$\sigma_{\text{combinado}} = \sqrt{\sigma_{\text{Instrumental}}^2 + \sigma_{\text{Aleatório}}^2}$$



$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

\* No Vuolo = incerteza padrão

# Estimando Incerteza em medições Repetidas

## Exemplo

- Medida de tempo (em s):
  - Número de medidas:  $n=4$
  - Erro instrumental: 0,01 s
  - Média aritmética:

Medidas	t(s)
1	2,30
2	2,40
3	2,50
4	2,40

- $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{2,30 + 2,40 + 2,50 + 2,40}{4} = 2,40 \text{ s}$

- Desvio padrão:

- $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{4-1}} = 0,10 \text{ s}$

# Estimando Incerteza em medições Repetidas

## Exemplo

- Erro combinado

- $\sigma_{combinado} = \sqrt{0,01^2 + 0,10^2} = \sqrt{0,0101} = 0,10 \text{ s}$

**Medida= melhor estimativa  $\pm$  incerteza**

$$**t = \bar{t} \pm \sigma_{combinado} = 2,40 \pm 0,10 \text{ s}**$$

## Resumindo: Para Várias Medidas\*:

- 1. Obter a média aritmética das medidas (que será a melhor estimativa da medida)**
- 2. calcular o desvio padrão**
- 3. combinar com o erro instrumental.**

\* Utilizamos em medida de massa (balança digital), tempo (cronômetro), etc...

# Desvio padrão da média ou erro da média

A variabilidade das médias é estimada pelo seu erro padrão (desvio padrão da média). Assim, o erro padrão da média avalia a precisão do cálculo da média populacional.

O erro padrão da média é dado por:

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Exemplo. Numa população obteve-se desvio padrão de 2,64 com uma amostra aleatória de 60 elementos. Qual o desvio padrão da média?

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,64}{\sqrt{60}} = 0,3408$$

Isso indica que a média pode variar 0,3408 para mais ou para menos.

# Medições e Erros

## Exercício

Os dados na tabela referem-se a massa de uma amostra metálica medida em uma balança.

**Dado:** Erro instrumental da balança: 0,10 g

**Calcule:**

- a) a média
- b) o desvio padrão
- c) o erro combinado
- d) escreva a medida da massa com a incerteza

Medida	Massa(g)
Medida 1	52,53
Medida 2	52,52
Medida 3	51,53
Medida 4	51,54
Medida 5	52,53

# Na calculadora

Média 52,13 g

Desv padrão 0,54 g



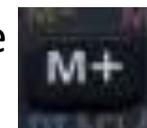
Apague os dados da memória (shift -> CLR)



Mude para o modo Standard Deviation (SD)



Ao inserir cada valor aperte



Calcule a média e o desvio padrão (n-1)



# Resultado

**a média = 52,13 g**

**erro instrumental = 0,10 g**

**o desvio padrão = 0,54 g**

**o erro combinado =  $\sqrt{0,10^2 + 0,54^2} = 0,55$  g**

**escreva a medida da massa com a incerteza**

$$m = \bar{m} \pm dm$$

$$m = 52,13 \pm 0,55 \text{ g}$$

# No Excel

## Outro dados exemplo

The screenshot shows the Microsoft Excel interface. The ribbon includes 'ARQUIVO', 'PÁGINA INICIAL', 'INSERIR', and 'LAYOUT DA PÁGINA'. The 'Fonte' group is active, showing font size '11' and bold, italic, and underline options. The formula bar shows the active cell 'B10' containing the formula `=MÉDIA(A1:A7)`. The spreadsheet grid shows columns A through E and rows 1 through 11. Column A contains the values 5,12, 5,2, 5,15, 5,17, 5,16, 5,19, and 5,15. Cell B10 is highlighted with a green border and contains the text 'Média' and the formula `=MÉDIA(A1:A7)`.

	A	B	C	D	E
1	5,12				
2	5,2				
3	5,15				
4	5,17				
5	5,16				
6	5,19				
7	5,15				
8					
9					
10	Média	<code>=MÉDIA(A1:A7)</code>			
11					

The screenshot shows the Microsoft Excel interface. The ribbon includes 'ARQUIVO', 'PÁGINA INICIAL', 'INSERIR', and 'LAYOUT DA PÁGINA'. The 'Fonte' group is active, showing font size '11' and bold, italic, and underline options. The formula bar shows the active cell 'B11' containing the formula `=DESVPAD.A(A1:A7)`. The spreadsheet grid shows columns A through F and rows 1 through 12. Column A contains the values 5,12, 5,2, 5,15, 5,17, 5,16, 5,19, and 5,15. Cell B11 is highlighted with a green border and contains the text 'Desvio' and the formula `=DESVPAD.A(A1:A7)`.

	A	B	C	D	E	F
1	5,12					
2	5,2					
3	5,15					
4	5,17					
5	5,16					
6	5,19					
7	5,15					
8						
9						
10	Média	5,162857				
11	Desvio	<code>=DESVPAD.A(A1:A7)</code>				
12						

# Referência Bibliográfica

- **José Henrique Vuolo “Fundamentos da Teoria de Erros”, 2ª edição, 7ª reimpressão (2012), Ed. Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1996.**
- **John R. Taylor “Introdução à Análise de Erros – O estudo de incerteza em medições físicas”, Ed. Bookman, Porto Alegre, 2012.**